III COUPLAGE DE TROIS ET QUATRE MOMENTS CINETIQUES

1. Couplage de trois moments cinétiques

Considérons l'addition de trois moments cinétiques $\bar{j}_1$, $\bar{j}_2$ et $\bar{j}_3$ pour former le moment cinétique total

$$\bar{J} = \bar{j}_1 + \bar{j}_2 + \bar{j}_3 \ . \tag{1.1}$$

C'est un problème qui se présente fréquemment en spectroscopie. Il apparaît notamment dans l'étude des systèmes de trois particules.

Notons d'abord qu'il n'y a pas de manière unique d'effectuer le couplage. Nous pouvons en effet

(i) d'abord coupler $\bar{j}_1$ et $\bar{j}_2$ pour donner une résultante $\bar{j}_{12}$, puis coupler celle-ci à $\bar{j}_3$ pour donner $\bar{J}$,

(ii) d'abord coupler $\bar{j}_2$ et $\bar{j}_3$ pour donner une résultante $\bar{j}_{23}$, puis coupler $\bar{j}_1$ à celle-ci pour donner $\bar{J}$,

(iii) d'abord coupler $\bar{j}_1$ et $\bar{j}_3$ pour donner une résultante $\bar{j}_{13}$, puis $\bar{j}_2$ à celle-ci pour donner $\bar{J}$.

Il y a également une indétermination dans l'ordre dans lequel sont effectués les couplages, mais celle-ci n'est pas essentielle car elle n'introduit qu'une différence de ph ase dans les coefficients de Clebsch-Gordan correspondants (cf.(II 4.13)). Il y a donc en tout trois modes différents de couplage de trois moments cinétiques.

Considérons l'exemple suivant : $j_1 = 1$, $j_2 = 2$, $j_3 = 3$, $J = 1$. Dans le cas (i), les valeurs possibles de j_{12} sont 1, 2 et 3; les valeurs $j_{12} = 2$ et $j_{12} = 3$ peuvent donner $J = 1$ quand on les couple à $j_3 = 3$. Pour $J = 1$ et une valeur donnée de M $(-1 \leqslant M \leqslant 1)$, il y a donc deux états. Ces états sont indépendants et peuvent être distingués par la valeur de j_{12}. Si on adopte par contre le schéma de couplage (ii), les valeurs possibles de j_{23} sont 1, 2, 3, 4 et 5 ; les valeurs $j_{23} = 1$ et $j_{23} = 2$ peuvent donner $J = 1$ quand on les couple à $j_1 = 1$. Les deux états indépendants, correspondant à $J = 1$ et une valeur donnée de M, peuvent donc être distingués d'une manière équivalente par la spécification de la valeur de j_{23}. Mais les états obtenus en (ii) ne coïncident pas en général avec ceux obtenus en (i): lesuns sont liés aux autres par une transformation unitaire.

En langage mathématique, les considérations ci-dessus s'expriment comme suit : on obtient un ensemble complet d'observables qui commutent en prenant les opérateurs Γ, $\bar{j}_1^2$, j_{1o}, $\bar{j}_2^2$, j_{2o}, $\bar{j}_3^2$ et j_{3o}, ce qui conduit à la représentation non couplée $|\gamma\, j_1\, m_1\, j_2\, m_2\, j_3\, m_3\rangle$. Si l'on désire diagonaliser simultanément les opérateurs Γ, $\bar{j}_1^2$, $\bar{j}_2^2$, $\bar{j}_3^2$, $\bar{J}^2$ et J_o pour obtenir une représentation couplée, il y a lieu d'ajouter un sixième opérateur de moment cinétique pour obtenir un ensemble complet (car les opérateurs de moment cinétique sont au nombre de six dans la représentation non couplée); on peut prendre $\bar{j}_{int}^2$, où $\bar{j}_{int}$ est l'un quelconque des moments cinétiques intermédiaires, car il commute avec les autres opérateurs. On obtient alors trois bases couplées $|\gamma\; j_1\, j_2\, j_3\, j_{int}\, J\, M\rangle$, qui sont liées l'une à l'autre par une transformation unitaire.

Nous allons étudier plus particulièrement la transformation unitaire qui fait passer de la base $|\gamma\,(j_1\, j_2)\, j_{12},\, j_3,\, J\, M\rangle$ à la base $|\gamma\; j_1,\, (j_2\, j_3)\, j_{23},\, J\, M\rangle$:

$$|\gamma\, j_1, (j_2 j_3) j_{23}, J M\rangle = \sum_{j_{12}} |\gamma (j_1 j_2) j_{12}, j_3, J M\rangle$$

$$\times \langle\gamma (j_1 j_2) j_{12}, j_3, J M | \gamma\, j_1, (j_2 j_3) j_{23}, J M\rangle . \qquad (1.2)$$

On peut montrer que les deux autres transformations unitaires n'apportent rien de neuf par rapport à (1.2). Les coefficients de la transformation (1.2) ne dépendent pas de γ pour la même raison que les coefficients de Clebsch-Gordan ne dépendent pas de γ . Nous allons montrer qu'ils ne dépendent pas non plus de M. Pour ce faire, appliquons l'opérateur J_+ aux deux membres de (1.2). On obtient en vertu de (I 8.28)

$$\left[(J-M)(J+M+1)\right]^{\frac{1}{2}} \quad |\gamma j_1, (j_2 j_3) j_{23}, J\ M+1\rangle$$

$$= \sum_{j_{12}} \left[(J-M)(J+M+1)\right]^{\frac{1}{2}} \ |\gamma (j_1 j_2) j_{12}, j_3, J\ M+1\rangle$$

$$\langle (j_1 j_2) j_{12}, j_3, J M \,|\, j_1, (j_2 j_3) j_{23}, J M\rangle, \tag{1.3}$$

d'où par comparaison avec (1.2) dans laquelle on a remplacé M par M + 1,

$$\langle (j_1 j_2) j_{12}, j_3, J\ M+1 \,|\, j_1, (j_2 j_3) j_{23}, J\ M+1\rangle$$

$$= \langle (j_1 j_2) j_{12}, j_3, J M \,|\, j_1, (j_2 j_3) j_{23}, J M\rangle, \tag{1.4}$$

ce qui démontre l'indépendance par rapport à M. Par conséquent la relation (1.2) se récrit sous la forme

$$|j_1, (j_2 j_3) j_{23}, J M\rangle = \sum_{j_{12}} |(j_1 j_2) j_{12}, j_3, J M\rangle$$

$$\langle (j_1 j_2) j_{12}, j_3, J \,|\, j_1, (j_2 j_3) j_{23}, J\rangle. \tag{1.5}$$

où l'on a supprimé, dans les vecteurs, γ qui ne joue aucun rôle.

Les coefficients de la transformation (1.5) peuvent s'écrire sous forme de sommes de produits de quatre coefficients de Clebsch-Gordan et, de ce fait, sont complètement déterminés par la connaissance de ceux-ci. En effet, par définition,

$$|(j_1 j_2) j_{12}, j_3, J M\rangle = \sum_{m_{12} m_3} |j_1 j_2 j_{12} m_{12}\rangle |j_3 m_3\rangle \langle j_{12} m_{12} j_3 m_3 | J M\rangle$$

$$= \sum_{m_1 m_2 m_{12} m_3} |j_1 m_1\rangle |j_2 m_2\rangle |j_3 m_3\rangle \langle j_1 m_1 j_2 m_2 | j_{12} m_{12}\rangle \langle j_{12} m_{12} j_3 m_3 | J M\rangle \tag{1.6}$$

et

$$|j_1,(j_2 j_3)j_{23}, JM\rangle = \sum_{m_1 m_{23}} |j_1 m_1\rangle |j_2 j_3 j_{23} m_{23}\rangle \langle j_1 m_1 j_{23} m_{23}|JM\rangle$$

$$= \sum_{m_1 m_2 m_3 m_{23}} |j_1 m_1\rangle |j_2 m_2\rangle |j_3 m_3\rangle \langle j_2 m_2 j_3 m_3 | j_{23} m_{23}\rangle \langle j_1 m_1 j_{23} m_{23}|JM\rangle . \tag{1.7}$$

La relation (1.5) se récrit donc

$$\sum_{m_1 m_2 m_3 m_{23}} |j_1 m_1\rangle |j_2 m_2\rangle |j_3 m_3\rangle \langle j_2 m_2 j_3 m_3 | j_{23} m_{23}\rangle \langle j_1 m_1 j_{23} m_{23}|JM\rangle$$

$$= \sum_{j_{12}} \Big\{ \sum_{m_1 m_2 m_{12} m_3} |j_1 m_1\rangle |j_2 m_2\rangle |j_3 m_3\rangle \langle j_1 m_1 j_2 m_2 | j_{12} m_{12}\rangle$$

$$\langle j_{12} m_{12} j_3 m_3 | JM\rangle \langle (j_1 j_2) j_{12}, j_3, J | j_1, (j_2 j_3) j_{23}, J\rangle \Big\} . \tag{1.8}$$

En multipliant les deux membres de cette équation par $\langle j_1 \mu_1| \langle j_2 \mu_2|$ $\langle j_3 \mu_3|$, on obtient

$$\sum_{m_{23}} \langle j_2 \mu_2 j_3 \mu_3 | j_{23} m_{23}\rangle \langle j_1 \mu_1 j_{23} m_{23} | JM\rangle$$

$$= \sum_{j_{12}} \Big\{ \sum_{m_{12}} \langle j_1 \mu_1 j_2 \mu_2 | j_{12} m_{12}\rangle \langle j_{12} m_{12} j_3 \mu_3 | JM\rangle$$

$$\langle (j_1 j_2) j_{12}, j_3, J | j_1, (j_2 j_3) j_{23}, J\rangle \Big\} . \tag{1.9}$$

En multipliant la relation (1.9) par $\langle j_1 \mu_1 j_2 \mu_2 | j_{12} m_{12}\rangle$ et en sommant sur μ_1 et μ_2, on a, en vertu de la relation d'orthonormalité des coefficients de Clebsch-Gordan (II 2.6),

$$\sum_{\mu_1 \mu_2 m_{23}} \langle j_1 \mu_1 j_2 \mu_2 | j_{12} m_{12}\rangle \langle j_2 \mu_2 j_3 \mu_3 | j_{23} m_{23}\rangle \langle j_1 \mu_1 j_{23} m_{23} | JM\rangle$$

$$= \langle j_{12} m_{12} j_3 \mu_3 | JM\rangle \langle (j_1 j_2) j_{12}, j_3, J | j_1, (j_2 j_3) j_{23}, J\rangle . \tag{1.10}$$

Finalement, en multipliant par $\langle j_{12}\ m_{12}\ j_3\ \mu_3 \mid J\ M\rangle$ et en sommant sur m_{12} et μ_3, on obtient en vertu de la même relation

$$\langle (j_1 j_2) j_{12}, j_3, J \mid j_1, (j_2 j_3) j_{23}, J\rangle = \sum_{m_1 m_2 m_3 m_{12} m_{23}} \Big\{ \langle j_1\ m_1\ j_2\ m_2 \mid j_{12}\ m_{12}\rangle$$

$$\langle j_{12}\ m_{12}\ j_3\ m_3 \mid J\ M\rangle \langle j_2\ m_2\ j_3\ m_3 \mid j_{23}\ m_{23}\rangle \langle j_1\ m_1\ j_{23}\ m_{23} \mid J M\rangle \Big\} . \quad (1.11)$$

Notons qu'en vertu de la règle de sélection (II 2.4) sur les coefficients de Clebsch-Gordan, la sommation quintuple dans (1.11) se réduit en fait à une sommation double

$$\langle (j_1 j_2) j_{12}, j_3, J \mid j_1, (j_2 j_3) j_{23}, J\rangle = \sum_{m_1 m_2} \Big\{ \langle j_1\ m_1\ j_2\ m_2 \mid j_{12}\ m_1+m_2\rangle$$

$$\langle j_{12}\ m_1+m_2\ \ j_3\ \ M-m_1-m_2 \mid J\ M\rangle \ \langle j_2\ m_2\ \ j_3\ \ M-m_1-m_2 \mid j_{23}\ \ M-m_1\rangle$$

$$\langle j_1\ m_1\ j_{23}\ \ M-m_1 \mid J M\rangle \Big\} . \quad (1.12)$$

L'unitarité de la transformation (1.5), jointe à son caractère réel (en vertu de (1.12) et de la réalité des coefficients de Clebsch-Gordan), conduit aux relations

$$\sum_{j_{12}} \langle (j_1 j_2) j_{12}, j_3, J \mid j_1, (j_2 j_3) j_{23}, J\rangle \langle (j_1 j_2) j_{12}, j_3, J \mid j_1, (j_2 j_3) j'_{23}, J\rangle = \delta_{j_{23} j'_{23}} \quad (1.13)$$

et

$$\sum_{j_{23}} \langle (j_1 j_2) j_{12}, j_3, J \mid j_1, (j_2 j_3) j_{23}, J\rangle \langle (j_1 j_2) j'_{12}, j_3, J \mid j_1, (j_2 j_3) j_{23}, J\rangle = \delta_{j_{12} j'_{12}} . \quad (1.14)$$

2. Symbole 6j de Wigner

Comme il était commode de passer du coefficient de Clebsch-Gordan au symbole 3j, de même il est utile de définir une quantité proportionnelle au coefficient de la transformation (1.5), en choisissant sa normalisation de manière à ce qu'elle ait la symétrie maximum par rapport aux permutations de ses arguments. Cette nouvelle quantité est le symbole 6j de Wigner, défini par

$$\begin{Bmatrix} j_1 & j_2 & j_{12} \\ j_3 & J & j_{23} \end{Bmatrix} = (-1)^{j_1+j_2+j_3+J} \left[(2j_{12}+1)(2j_{23}+1) \right]^{-\frac{1}{2}}$$

$$\times \langle (j_1 j_2) j_{12}, j_3, J \mid j_1, (j_2 j_3) j_{23}, J \rangle . \qquad (2.1)$$

En vertu de (1.12), il est donné en fonction des coefficients de Clebsch-Gordan par

$$\begin{Bmatrix} j_1 & j_2 & j_{12} \\ j_3 & J & j_{23} \end{Bmatrix} = (-1)^{j_1+j_2+j_3+J} \left[(2j_{12}+1)(2j_{23}+1) \right]^{-\frac{1}{2}}$$

$$\sum_{m_1 m_2} \Big\{ \langle j_1\, m_1\, j_2\, m_2 \mid j_{12}\; m_1+m_2 \rangle \langle j_{12}\; m_1+m_2\; j_3\; M-m_1-m_2 \mid J\, M \rangle$$

$$\langle j_2\, m_2\, j_3\; M-m_1-m_2 \mid j_{23}\; M-m_1 \rangle \langle j_1\, m_1\, j_{23}\; M-m_1 \mid J M \rangle \Big\} . \qquad (2.2)$$

Le symbole 6j n'est donc différent de zéro que si les inégalités triangulaires $\delta(j_1\, j_2\, j_{12})$, $\delta(j_{12}\, j_3\, J)$, $\delta(j_2\, j_3\, j_{23})$ et $\delta(j_1\, j_{23}\, J)$ sont toutes satisfaites.

En introduisant dans la relation (2.2) l'expression (II 5.20) pour les coefficients de Clebsch-Gordan, Racah a été capable de réduire à un seul le nombre d'indices de sommation. Son expression finale pour le symbole 6j est la suivante :

$$\begin{Bmatrix} j_1 & j_2 & j_{12} \\ j_3 & J & j_{23} \end{Bmatrix}$$

$$= \Delta(j_1 j_2 j_{12})\, \Delta(j_{12} j_3 J)\, \Delta(j_2 j_3 j_{23})\, \Delta(j_1 j_{23} J)\quad w\begin{Bmatrix} j_1 & j_2 & j_{12} \\ j_3 & J & j_{23} \end{Bmatrix}, \qquad (2.3)$$

où

$$\Delta(a\,b\,c) = \left[\frac{(a+b-c)!\,(a-b+c)!\,(-a+b+c)!}{(a+b+c+1)!} \right]^{\frac{1}{2}} \qquad (2.4)$$

et

$$w\begin{Bmatrix} j_1 & j_2 & j_{12} \\ j_3 & J & j_{23} \end{Bmatrix} = \sum_{z} \Big\{ (-1)^{z}\,(z+1)! \Big[(z-j_1-j_2-j_{12})!\,(z-j_1-j_{23}-J)!$$

$$\times (z-j_2-j_3-j_{23})!\,(z-j_{12}-j_3-J)!\,(j_1+j_2+j_3+J-z)!\,(j_2+j_{12}+j_{23}+J-z)!$$

$$\times (j_1+j_3+j_{12}+j_{23}-z)! \Big]^{-1} \Big\} . \qquad (2.5)$$

Les propriétés de symétrie du symbole 6j sont plus faciles à déduire si l'on remplace dans (2.2) les coefficients de Clebsch-Gordan par des symboles 3j. On a en vertu de (II 6.2) :

$$\begin{Bmatrix} j_1 & j_2 & j_{12} \\ j_3 & J & j_{23} \end{Bmatrix} = (-1)^{j_1+j_2+j_3+J} \left[(2j_{12}+1)(2j_{23}+1) \right]^{-\frac{1}{2}} (2J+1)^{-1}$$

$$\sum_{m_1 m_2 m_3 m_{12} m_{23} M} \Big\{ \langle j_1 m_1\, j_2 m_2 | j_{12} m_{12} \rangle \langle j_{12} m_{12}\, j_3 m_3 | J M \rangle$$

$$\langle j_2 m_2\, j_3 m_3 | j_{23} m_{23} \rangle \langle j_1 m_1\, j_{23} m_{23} | J M \rangle \Big\}$$

$$= (-1)^{j_1+j_2+j_3+J} \left[(2j_{12}+1)(2j_{23}+1)\right]^{-\frac{1}{2}} (2J+1)^{-1} \left[(2j_{12}+1)(2j_{23}+1)\right.$$

$$\left.(2J+1)^2\right]^{\frac{1}{2}} \sum_{m_1 m_2 m_3 m_{12} m_{23} M} \left\{ (-1)^{j_1-j_2+m_{12}+j_{12}-j_3+M+j_2-j_3+m_{23}}\right.$$

$$\left.(-1)^{j_1-j_{23}+M} \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_{12} \\ m_1 & m_2 & -m_{12} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} j_{12} & j_3 & J \\ m_{12} & m_3 & -M \end{pmatrix} \begin{pmatrix} j_2 & j_3 & j_{23} \\ m_2 & m_3 & -m_{23} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} j_1 & j_{23} & J \\ m_1 & m_{23} & -M \end{pmatrix} \right\}. \qquad (2.6)$$

Notons que les sommations sur m_3, m_{12} et m_{23}, que nous avons introduites, se réduisent en fait à un seul terme en raison de la règle de sélection sur les m des coefficients de Clebsch-Gordan, tandis que la sommation sur M est compensée par le facteur $(2J + 1)^{-1}$. La phase dans (2.6) est égale à

$$(-1)^{-j_1+j_2-j_3+j_{12}-j_{23}+J+m_{12}+m_{23}+2M}$$

$$= (-1)^{j_1+j_2+j_3+j_{12}+j_{23}+J+2m_1+2m_3+2m_{23}+m_{12}+m_{23}+2M}$$

$$= (-1)^{j_1+m_1+j_2+m_2+j_3+m_3+j_{12}-m_{12}+j_{23}+m_{23}+J+M}$$

$$\times (-1)^{m_1-m_2+m_3+2m_{12}+2m_{23}+M}$$

$$= (-1)^{j_1+m_1+j_2+m_2+j_3+m_3+j_{12}-m_{12}+j_{23}+m_{23}+J+M}$$

$$\times (-1)^{m_1-m_2+m_3+2(m_1+m_2)+2(m_2+m_3)+(m_1+m_2+m_3)}$$

$$= (-1)^{j_1+m_1+j_2+m_2+j_3+m_3+j_{12}-m_{12}+j_{23}+m_{23}+J+M} \qquad (2.7)$$

où l'on a utilisé les propriétés $(-1)^{4j} = +1$ et $(-1)^{2m} = (-1)^{2j}$. En remplaçant dans (2.6) et en changeant m_{12} en $-m_{12}$, on obtient finalement

$$\begin{Bmatrix} j_1 & j_2 & j_{12} \\ j_3 & J & j_{23} \end{Bmatrix} = \sum_{m_1 m_2 m_3 m_{12} m_{23} M} \Big\{ (-1)^{j_1+m_1+j_2+m_2+j_3+m_3+j_{12}+m_{12}}$$

$$(-1)^{j_{23}+m_{23}+J+M} \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_{12} \\ m_1 & m_2 & m_{12} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} j_{12} & j_3 & J \\ -m_{12} & m_3 & -M \end{pmatrix} \begin{pmatrix} j_2 & j_3 & j_{23} \\ m_2 & m_3 & -m_{23} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} j_1 & j_{23} & J \\ m_1 & m_{23} & -M \end{pmatrix} \Big\}. \tag{2.8}$$

Examinons maintenant les propriétés de symétrie de (2.8).

(i) Permutation des colonnes

On a

$$\begin{Bmatrix} j_2 & j_1 & j_{12} \\ J & j_3 & j_{23} \end{Bmatrix} = \sum_{m_1 m_2 m_3 m_{12} m_{23} M} \Big\{ (-1)^{j_2+m_2+j_1+m_1+J-M+j_{12}+m_{12}+j_{23}-m_{23}}$$

$$(-1)^{j_3-m_3} \begin{pmatrix} j_2 & j_1 & j_{12} \\ m_2 & m_1 & m_{12} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} j_{12} & J & j_3 \\ -m_{12} & -M & m_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} j_1 & J & j_{23} \\ m_1 & -M & m_{23} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} j_2 & j_{23} & j_3 \\ m_2 & -m_{23} & m_3 \end{pmatrix} \Big\} \tag{2.9}$$

en changeant les indices de sommation m_1, m_2, m_3, m_{23}, M en m_2, m_1, $-M$, $-m_{23}$, $-m_3$ respectivement. Si l'on applique la propriété (II 6.6) ou (II 6.7) aux symboles 3j, on obtient

$$\begin{Bmatrix} j_2 & j_1 & j_{12} \\ J & j_3 & j_{23} \end{Bmatrix} = \sum_{m_1 m_2 m_3 m_{12} m_{23} M} \Big\{ (-1)^{j_1+m_1+j_2+m_2+j_3+m_3+j_{12}+m_{12}}$$

$$(-1)^{j_{23}+m_{23}+J+M} \times (-1)^{2m_3+2m_{23}+2M} \times (-1)^{j_1+j_2+j_{12}} \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_{12} \\ m_1 & m_2 & m_{12} \end{pmatrix}$$

$$\times \ (-1)^{j_{12}+j_3+J} \begin{pmatrix} j_{12} & j_3 & J \\ -m_{12} & m_3 & -M \end{pmatrix} \times (-1)^{j_2+j_3+j_{23}} \begin{pmatrix} j_2 & j_3 & j_{23} \\ m_2 & m_3 & -m_{23} \end{pmatrix}$$

$$\times \ (-1)^{j_1+j_{23}+J} \begin{pmatrix} j_1 & j_{23} & J \\ m_1 & m_{23} & -M \end{pmatrix} \Bigg\} . \tag{2.10}$$

La relation (2.10) diffère de (2.8) par la phase

$$(-1)^{2m_3+2m_{23}+2M+j_1+j_2+j_{12}+j_{12}+j_3+J+j_2+j_3+j_{23}+j_1+j_{23}+J}$$

$$= (-1)^{2j_1+2j_2+2j_{12}} = +1 , \tag{2.11}$$

car $j_1 + j_2 + j_{12}$ est toujours entier. Par conséquent

$$\begin{Bmatrix} j_2 & j_1 & j_{12} \\ J & j_3 & j_{23} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} j_1 & j_2 & j_{12} \\ j_3 & J & j_{23} \end{Bmatrix} . \tag{2.12}$$

On démontre de même que

$$\begin{Bmatrix} j_1 & j_{12} & j_2 \\ j_3 & j_{23} & J \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} j_1 & j_2 & j_{12} \\ j_3 & J & j_{23} \end{Bmatrix} . \tag{2.13}$$

Par combinaison de (2.12) et (2.13), on obtient que le symbole 6j est invariant pour toute permutation de ses colonnes :

$$\begin{Bmatrix} j_1 & j_2 & j_{12} \\ j_3 & J & j_{23} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} j_2 & j_1 & j_{12} \\ J & j_3 & j_{23} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} j_1 & j_{12} & j_2 \\ j_3 & j_{23} & J \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} j_{12} & j_2 & j_1 \\ j_{23} & J & j_3 \end{Bmatrix}$$

$$= \begin{Bmatrix} j_2 & j_{12} & j_1 \\ J & j_{23} & j_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} j_{12} & j_1 & j_2 \\ j_{23} & j_3 & J \end{Bmatrix} . \tag{2.14}$$

(ii) Permutation des arguments inférieurs et supérieurs dans deux colonnes .

On a

$$\begin{Bmatrix} j_1 & J & j_{23} \\ j_3 & j_2 & j_{12} \end{Bmatrix} = \sum_{m_1 m_2 m_3 m_{12} m_{23} M} \Bigg\{ (-1)^{j_1-m_1+J+M+j_3-m_3+j_{23}-m_{23}+j_{12}-m_{12}}$$

$$(-1)^{j_2+m_2} \begin{pmatrix} j_1 & J & j_{23} \\ -m_1 & M & -m_{23} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} j_{23} & j_3 & j_2 \\ m_{23} & -m_3 & -m_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} J & j_3 & j_{12} \\ M & -m_3 & m_{12} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} j_1 & j_{12} & j_2 \\ -m_1 & -m_{12} & -m_2 \end{pmatrix} \Bigg\} , \tag{2.15}$$

en changeant les indices de sommation m_1, m_2, m_3, m_{12}, m_{23}, M en $-m_1$, M, $-m_3$, $-m_{23}$, $-m_{12}$, m_2 respectivement. Si l'on applique les propriétés (II 6.6), (II 6.7) et (II 6.8) aux symboles 3j, on obtient

$$\begin{Bmatrix} j_1 & J & j_{23} \\ j_3 & j_2 & j_{12} \end{Bmatrix} = \sum_{m_1 m_2 m_3 m_{12} m_{23} M} \Bigg\{ (-1)^{j_1+m_1+j_2+m_2+j_3+m_3+j_{12}+m_{12}+j_{23}+m_{23}}$$

$$(-1)^{J+M} \times (-1)^{2m_1+2m_3+2m_{12}+2m_{23}} \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_{12} \\ m_1 & m_2 & m_{12} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} j_{12} & j_3 & J \\ -m_{12} & m_3 & -M \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} j_2 & j_3 & j_{23} \\ m_2 & m_3 & -m_{23} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} j_1 & j_{23} & J \\ m_1 & m_{23} & -M \end{pmatrix} \Bigg\} . \tag{2.16}$$

La relation (2.16) diffère de (2.8) par la phase

$$(-1)^{2m_1+2m_3+2m_{12}+2m_{23}} = (-1)^{2m_1+2m_3+2(m_1+m_2)+2(m_2+m_3)}$$

$$= +1 . \qquad (2.17)$$

Par conséquent

$$\begin{Bmatrix} j_1 & J & j_{23} \\ j_3 & j_2 & j_{12} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} j_1 & j_2 & j_{12} \\ j_3 & J & j_{23} \end{Bmatrix} . \qquad (2.18)$$

L'invariance du symbole 6j par permutation des colonnes implique que

$$\begin{Bmatrix} j_1 & j_2 & j_{12} \\ j_3 & J & j_{23} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} j_1 & J & j_{23} \\ j_3 & j_2 & j_{12} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} j_3 & j_2 & j_{23} \\ j_1 & J & j_{12} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} j_3 & J & j_{12} \\ j_1 & j_2 & j_{23} \end{Bmatrix} . \qquad (2.19)$$

La combinaison des permutations de type (i) avec celles de type (ii) montre qu'il existe en tout vingt-quatre opérations qui laissent invariant un symbole 6j.

Finalement, les relations d'orthogonalité (1.13) et (1.14), satisfaites par les coefficients de la transformation (1.5), entraînent des relations entre les symboles 6j. En introduisant (2.1) dans (1.13), on obtient

$$\sum_{j_{12}} (2j_{12}+1)(2j_{23}+1) \begin{Bmatrix} j_1 & j_2 & j_{12} \\ j_3 & J & j_{23} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} j_1 & j_2 & j_{12} \\ j_3 & J & j'_{23} \end{Bmatrix} = \delta_{j_{23} j'_{23}} . \qquad (2.20)$$

La relation qui découle de (1.14) est équivalente à (2.20) en raison des propriétés de symétrie du symbole 6j.

Lorsque l'un des six moments cinétiques qui interviennent dans la définition du symbole 6j est nul, ce dernier possède une valeur très simple, que nous allons déterminer. Par l'usage des relations de symétrie, le moment cinétique nul peut toujours être amené à la place occupée par j_{23}, de telle sorte qu'il nous suffit de calculer le symbole 6j correspondant à j_{23} = o. Dans ce cas, la relation (2.2) se récrit sous la forme

$$\begin{Bmatrix} j_1 & j_2 & j_{12} \\ j_3 & J & 0 \end{Bmatrix} = (-1)^{j_1+j_2+j_3+J} (2j_{12}+1)^{-\frac{1}{2}} \sum_{m_1 m_2} \Big\{ \langle j_1 m_1 \, j_2 m_2 | j_{12} \, m_1+m_2 \rangle$$

$$\langle j_{12} \, m_1+m_2 \, j_3 \, M-m_1-m_2 | J M \rangle \langle j_2 m_2 \, j_3 \, M-m_1-m_2 | 0 \, M-m_1 \rangle \langle j_1 m_1 \, 0 \, M-m_1 | J M \rangle \Big\} . \tag{2.21}$$

En remplaçant les deux derniers coefficients de Clebsch-Gordan par leur valeur tirée de (II 5.27)et (II 5.24), on obtient

$$\begin{Bmatrix} j_1 & j_2 & j_{12} \\ j_3 & J & 0 \end{Bmatrix} = \delta_{j_2 j_3} \, \delta_{j_1 J} \, (-1)^{2j_1+2j_2} \left[(2j_{12}+1)(2j_2+1) \right]^{-\frac{1}{2}}$$

$$\sum_{m_2} \Big\{ (-1)^{j_2-m_2} \langle j_1 M \, j_2 m_2 | j_{12} \, M+m_2 \rangle \langle j_{12} \, M+m_2 \, j_2 \, -m_2 | j_1 M \rangle \Big\} . \tag{2.22}$$

Les propriétés de symétrie (II 4.13) et (II 4.26) des coefficients de Clebsch-Gordan conduisent à l'expression

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} j_1 & j_2 & j_{12} \\ j_3 & J & 0 \end{Bmatrix} = {} & \delta_{j_2 j_3} \, \delta_{j_1 J} \, (-1)^{2j_1+2j_2} \left[(2j_{12}+1)(2j_2+1) \right]^{-\frac{1}{2}} \\ & \sum_{m_2} \Big\{ (-1)^{j_2-m_2} (-1)^{j_2+m_2} \left(\frac{2j_{12}+1}{2j_1+1} \right)^{\frac{1}{2}} \langle j_2 \, -m_2 \, j_{12} \, M+m_2 | j_1 M \rangle \\ & \times (-1)^{j_{12}+j_2-j_1} \langle j_2 \, -m_2 \, j_{12} \, M+m_2 | j_1 M \rangle \Big\} \\ = {} & \delta_{j_2 j_3} \, \delta_{j_1 J} \, (-1)^{j_1+j_2+j_{12}} \left[(2j_1+1)(2j_2+1) \right]^{-\frac{1}{2}} \\ & \times \sum_{m_2} \langle j_2 \, -m_2 \, j_{12} \, M+m_2 | j_1 M \rangle^2 . \end{aligned} \tag{2.23}$$

La propriété d'orthogonalité (II 2.8) des coefficients de Clebsch-Gordan donne l'expression finale

$$\begin{Bmatrix} j_1 & j_2 & j_{12} \\ j_3 & J & 0 \end{Bmatrix} = \delta_{j_1 J} \, \delta_{j_2 j_3} \frac{(-1)^{j_1+j_2+j_{12}}}{\sqrt{(2j_1+1)(2j_2+1)}} \, . \tag{2.24}$$

3. Couplage de quatre moments cinétiques

Considérons l'addition de quatre moments cinétiques $\bar{j}_1$, $\bar{j}_2$, $\bar{j}_3$ et $\bar{j}_4$ pour former le moment cinétique total

$$\bar{J} = \bar{j}_1 + \bar{j}_2 + \bar{j}_3 + \bar{j}_4 \, . \tag{3.1}$$

Il existe bien entendu encore plus de manières d'effectuer le couplage que dans le cas de trois moments cinétiques. Comme précédemment, nous allons étudier le passage d'un mode de couplage à un autre.

Un ensemble complet d'observables qui commutent est constitué par les opérateurs Γ, $\bar{j}_1^2$, j_{10}, $\bar{j}_2^2$, j_{20}, $\bar{j}_3^2$, j_{30}, $\bar{j}_4^2$ et j_{40}. Il conduit à la représentation non couplée $|\gamma \; j_1 \; m_1 \; j_2 \; m_2 \; j_3 \; m_3 \; j_4 \; m_4\rangle$. Si l'on désire diagonaliser simultanément les opérateurs Γ, $\bar{j}_1^2$, $\bar{j}_2^2$, $\bar{j}_3^2$, $\bar{j}_4^2$, $\bar{J}^2$ et J_0, il y a lieu d'ajouter deux opérateurs de moment cinétique supplémentaires pour obtenir un ensemble complet (car les opérateurs de moment cinétique sont au nombre de huit dans la représentation non couplée). On prendra $\bar{j}_{int}^2$ et $\bar{j}'^2_{int}$, où $\bar{j}_{int}$ résulte du couplage de deux quelconques des quatre moments cinétiques et $\bar{j}'_{int}$ de celui des deux moments cinétiques restants. On obtient alors une des bases couplées $|\gamma \; j_1 \; j_2 \; j_3 \; j_4 \; j_{int} \; j'_{int} \; J \; M\rangle$, qui sont liées l'une à l'autre par une transformation unitaire.

Nous allons étudier plus particulièrement la transformation unitaire qui fait passer de la base $|\gamma \; (j_1 \; j_2)j_{12}, (j_3 \; j_4)j_{34}, J \; M\rangle$ à la base $|\gamma \; (j_1 \; j_3) j_{13} , (j_2 \; j_4) \; j_{24} , J \; M\rangle$:

$$|\gamma, (j_1 j_3) j_{13}, (j_2 j_4) j_{24}, JM\rangle = \sum_{j_{12}\, j_{34}} |\gamma (j_1 j_2) j_{12}, (j_3 j_4) j_{34}, JM\rangle$$

$$\times \langle (j_1 j_2) j_{12}, (j_3 j_4) j_{34}, J | (j_1 j_3) j_{13}, (j_2 j_4) j_{24}, J\rangle . \tag{3.2}$$

Dans l'écriture de (3.2), nous avons utilisé explicitement le fait que les coefficients de la transformation ne dépendent ni de γ, ni de M (ce qui se démontre de la même manière que pour la transformation (1.5)).

La transformation peut s'effectuer en trois étapes, de la manière suivante :

$$\langle (j_1 j_2) j_{12}, (j_3 j_4) j_{34}, J | (j_1 j_3) j_{13}, (j_2 j_4) j_{24}, J\rangle$$

$$= \sum_{j_{234}} \langle (j_1 j_2) j_{12}, (j_3 j_4) j_{34}, J | j_1, [j_2, (j_3 j_4) j_{34}] j_{234}, J\rangle$$

$$\times \langle j_1, [j_2, (j_3 j_4) j_{34}] j_{234}, J | j_1, [j_3, (j_2 j_4) j_{24}] j_{234}, J\rangle$$

$$\times \langle j_1, [j_3, (j_2 j_4) j_{24}] j_{234}, J | (j_1 j_3) j_{13}, (j_2 j_4) j_{24}, J\rangle . \tag{3.3}$$

Chacune des étapes consiste en le changement du mode de couplage de trois moments cinétiques seulement. Par conséquent le coefficient (3.3) doit pouvoir s'écrire sous forme d'une somme de produits de trois coefficients du type (1.11). On a en effet :

$$\langle (j_1 j_2) j_{12}, (j_3 j_4) j_{34}, J | j_1, [j_2, (j_3 j_4) j_{34}] j_{234}, J\rangle$$

$$= \langle (j_1 j_2) j_{12}, j_{34}, J \,|\, j_1, (j_2 j_{34}) j_{234}, J \rangle \,, \tag{3.4}$$

$$\langle j_1, [j_2, (j_3 j_4) j_{34}] j_{234}, J \,|\, j_1, [j_3, (j_2 j_4) j_{24}] j_{234}, J \rangle$$

$$= \langle j_2, (j_3 j_4) j_{34}, j_{234} \,|\, j_3, (j_2 j_4) j_{24}, j_{234} \rangle$$

$$= (-1)^{j_2 + j_{34} - j_{234} + j_2 + j_4 - j_{24}} \langle (j_3 j_4) j_{34}, j_2, j_{234} \,|\, j_3, (j_4 j_2) j_{24}, j_{234} \rangle \tag{3.5}$$

et

$$\langle j_1, [j_3, (j_2 j_4) j_{24}] j_{234}, J \,|\, (j_1 j_3) j_{13}, (j_2 j_4) j_{24}, J \rangle$$

$$= \langle j_1, (j_3 j_{24}) j_{234}, J \,|\, (j_1 j_3) j_{13}, j_{24}, J \rangle \,, \tag{3.6}$$

d'où

$$\langle (j_1 j_2) j_{12}, (j_3 j_4) j_{34}, J \,|\, (j_1 j_3) j_{13}, (j_2 j_4) j_{24}, J \rangle$$

$$= \sum_{j_{234}} (-1)^{j_{24} + j_{34} - j_4 - j_{234}} \langle (j_1 j_2) j_{12}, j_{34}, J \,|\, j_1, (j_2 j_{34}) j_{234}, J \rangle$$

$$\times \langle (j_3 j_4) j_{34}, j_2, j_{234} \,|\, j_3, (j_4 j_2) j_{24}, j_{234} \rangle$$

$$\times \langle (j_1 j_3) j_{13}, j_{24}, J \,|\, j_1, (j_3 j_{24}) j_{234}, J \rangle \,. \tag{3.7}$$

L'introduction dans (3.7) des symboles 6j par l'intermédiaire de la relation (2.1) conduit à l'expression du coefficient de transformation en fonction des symboles 6j :

$$\langle (j_1 j_2) j_{12}, (j_3 j_4) j_{34}, J | (j_1 j_3) j_{13}, (j_2 j_4) j_{24}, J \rangle$$

$$= \left[(2j_{12}+1)(2j_{34}+1)(2j_{13}+1)(2j_{24}+1) \right]^{\frac{1}{2}} \sum_{j_{234}} (-1)^{j_{24}+j_{34}-j_4-j_{234}}$$

$$\times (-1)^{j_1+j_2+j_{34}+J+j_3+j_4+j_2+j_{234}+j_1+j_3+j_{24}+J} (2j_{234}+1)$$

$$\times \begin{Bmatrix} j_1 & j_2 & j_{12} \\ j_{34} & J & j_{234} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} j_3 & j_4 & j_{34} \\ j_2 & j_{234} & j_{24} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} j_1 & j_3 & j_{13} \\ j_{24} & J & j_{234} \end{Bmatrix} . \qquad (3.8)$$

La phase est égale à

$$(-1)^{2j_1+2j_2+2j_3+2j_{24}+2j_{34}+2J} = (-1)^{2j_1+2j_2+2j_{12}} (-1)^{2j_{12}+2j_{34}+2J} (-1)^{2j_3+2j_{24}}$$

$$= (-1)^{2j_3+2j_{24}} = (-1)^{2j_{234}} . \qquad (3.9)$$

Par conséquent

$$\langle (j_1 j_2) j_{12}, (j_3 j_4) j_{34}, J | (j_1 j_3) j_{13}, (j_2 j_4) j_{24}, J \rangle$$

$$= \left[(2j_{12}+1)(2j_{34}+1)(2j_{13}+1)(2j_{24}+1) \right]^{\frac{1}{2}} \sum_{j_{234}} (-1)^{2j_{234}} (2j_{234}+1)$$

$$\begin{Bmatrix} j_1 & j_2 & j_{12} \\ j_{34} & J & j_{234} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} j_3 & j_4 & j_{34} \\ j_2 & j_{234} & j_{24} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} j_{13} & j_{24} & J \\ j_{234} & j_1 & j_3 \end{Bmatrix} , \qquad (3.10)$$

en utilisant la propriété de symétrie (2.19) dans le dernier symbole 6j.

L'unitarité et la réalité de la transformation (3.2) conduit aux relations d'orthogonalité

$$\sum_{j_{12}\, j_{34}} \langle (j_1 j_2) j_{12}, (j_3 j_4) j_{34}, J | (j_1 j_3) j_{13}, (j_2 j_4) j_{24}, J \rangle$$

$$\langle (j_1 j_2) j_{12}, (j_3 j_4) j_{34}, J | (j_1 j_3) j'_{13}, (j_2 j_4) j'_{24}, J \rangle = \delta_{j_{13} j'_{13}} \, \delta_{j_{24} j'_{24}} \qquad (3.11)$$

et

$$\sum_{j_{13}\, j_{24}} \langle (j_1 j_2) j_{12}, (j_3 j_4) j_{34}, J | (j_1 j_3) j_{13}, (j_2 j_4) j_{24}, J \rangle$$

$$\langle (j_1 j_2) j'_{12}, (j_3 j_4) j'_{34}, J | (j_1 j_3) j_{13}, (j_2 j_4) j_{24}, J \rangle = \delta_{j_{12} j'_{12}} \, \delta_{j_{34} j'_{34}} \, . \qquad (3.12)$$

4. Symbole 9j de Wigner

Comme précédemment, il est commode de considérer une quantité proportionnelle au coefficient de la transformation (3.2) et possédant une symétrie élevée par rapport aux permutations de ses arguments. C'est le symbole 9j de Wigner, défini par

$$\begin{Bmatrix} j_1 & j_2 & j_{12} \\ j_3 & j_4 & j_{34} \\ j_{13} & j_{24} & J \end{Bmatrix} = \left[(2j_{12}+1)(2j_{34}+1)(2j_{13}+1)(2j_{24}+1) \right]^{-\frac{1}{2}}$$

$$\times \langle (j_1 j_2) j_{12}, (j_3 j_4) j_{34}, J | (j_1 j_3) j_{13}, (j_2 j_4) j_{24}, J \rangle \, . \qquad (4.1)$$

En vertu de (3.10), il est donné en fonction des symboles 6j par

$$\begin{Bmatrix} j_1 & j_2 & j_{12} \\ j_3 & j_4 & j_{34} \\ j_{13} & j_{24} & J \end{Bmatrix} = \sum_K (-1)^{2K} \, (2K+1) \begin{Bmatrix} j_1 & j_2 & j_{12} \\ j_{34} & J & K \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} j_3 & j_4 & j_{34} \\ j_2 & K & j_{24} \end{Bmatrix}$$

$$\times \begin{Bmatrix} j_{13} & j_{24} & J \\ K & j_1 & j_3 \end{Bmatrix} . \tag{4.2}$$

Son expression en fonction des coefficients de Clebsch-Gordan ou des symboles 3j résulte directement des définitions (3.2) et (4.1). On a en effet :

$$|(j_1 j_2) j_{12}, (j_3 j_4) j_{34}, JM\rangle = \sum_{m_1 m_2 m_3 m_4 m_{12} m_{34}} \langle j_1 m_1 j_2 m_2 | j_{12} m_{12}\rangle$$

$$\langle j_3 j_4 m_3 m_4 | j_{34} m_{34}\rangle \langle j_{12} m_{12} j_{34} m_{34} | JM\rangle |j_1 m_1\rangle |j_2 m_2\rangle |j_3 m_3\rangle |j_4 m_4\rangle \tag{4.3}$$

et

$$|(j_1 j_3) j_{13}, (j_2 j_4) j_{24}, JM\rangle = \sum_{m_1 m_3 m_2 m_4 m_{13} m_{24}} \langle j_1 m_1 j_3 m_3 | j_{13} m_{13}\rangle$$

$$\langle j_2 m_2 j_4 m_4 | j_{24} m_{24}\rangle \langle j_{13} m_{13} j_{24} m_{24} | JM\rangle |j_1 m_1\rangle |j_2 m_2\rangle |j_3 m_3\rangle |j_4 m_4\rangle , \tag{4.4}$$

d'où

$$\sum_{\mu_{13} \mu_{24}} \langle j_1 \mu_1 j_3 \mu_3 | j_{13} \mu_{13}\rangle \langle j_2 \mu_2 j_4 \mu_4 | j_{24} \mu_{24}\rangle \langle j_{13} \mu_{13} j_{24} \mu_{24} | JM\rangle$$

$$= \sum_{j_{12} j_{34}} \left[(2j_{12}+1)(2j_{34}+1)(2j_{13}+1)(2j_{24}+1) \right]^{\frac{1}{2}} \begin{Bmatrix} j_1 & j_2 & j_{12} \\ j_3 & j_4 & j_{34} \\ j_{13} & j_{24} & J \end{Bmatrix} \sum_{\mu_{12} \mu_{34}}$$

$$\langle j_1 \mu_1 j_2 \mu_2 | j_{12} \mu_{12}\rangle \langle j_3 \mu_3 j_4 \mu_4 | j_{34} \mu_{34}\rangle \langle j_{12} \mu_{12} j_{34} \mu_{34} | JM\rangle . \tag{4.5}$$

En multipliant par $\langle j_1 \mu_1\, j_2 \mu_2 \mid j_{12}\, m_{12} \rangle \langle j_3 \mu_3\, j_4 \mu_4 \mid j_{34}\, m_{34} \rangle$ et en sommant sur μ_1, μ_2, μ_3 et μ_4, on obtient, en vertu de la relation d'orthogonalité des coefficients de Clebsch-Gordan (II 2.6),

$$\sum_{\mu_1 \mu_2 \mu_3 \mu_4 \mu_{13} \mu_{24}} \langle j_1 \mu_1\, j_2 \mu_2 \mid j_{12}\, m_{12} \rangle \langle j_3 \mu_3\, j_4 \mu_4 \mid j_{34}\, m_{34} \rangle$$

$$\langle j_1 \mu_1\, j_3 \mu_3 \mid j_{13}\, \mu_{13} \rangle \langle j_2 \mu_2\, j_4 \mu_4 \mid j_{24}\, \mu_{24} \rangle \langle j_{13} \mu_{13}\, j_{24} \mu_{24} \mid J M \rangle$$

$$= \left[(2j_{12}+1)(2j_{34}+1)(2j_{13}+1)(2j_{24}+1) \right]^{\frac{1}{2}} \begin{Bmatrix} j_1 & j_2 & j_{12} \\ j_3 & j_4 & j_{34} \\ j_{13} & j_{24} & J \end{Bmatrix}$$

$$\times \langle j_{12}\, m_{12}\, j_{34}\, m_{34} \mid J M \rangle . \qquad (4.6)$$

En multipliant par $\langle j_{12}\, m_{12}\, j_{34}\, m_{34} \mid J\, M \rangle$ et en sommant sur m_{12} et m_{34}, on obtient finalement

$$\begin{Bmatrix} j_1 & j_2 & j_{12} \\ j_3 & j_4 & j_{34} \\ j_{13} & j_{24} & J \end{Bmatrix} = \left[(2j_{12}+1)(2j_{34}+1)(2j_{13}+1)(2j_{24}+1) \right]^{-\frac{1}{2}}$$

$$\sum_{\substack{m_1 m_2 m_3 m_4 \\ m_{12} m_{34} m_{13} m_{24}}} \Big\{ \langle j_1 m_1\, j_2 m_2 \mid j_{12}\, m_{12} \rangle \langle j_3 j_4\, m_3 m_4 \mid j_{34}\, m_{34} \rangle \langle j_{12} m_{12} j_{34} m_{34} \mid J M \rangle$$

$$\langle j_1 m_1\, j_3 m_3 \mid j_{13}\, m_{13} \rangle \langle j_2 m_2\, j_4 m_4 \mid j_{24}\, m_{24} \rangle \langle j_{13} m_{13}\, j_{24} m_{24} \mid J M \rangle \Big\} . \qquad (4.7)$$

Le symbole 9j n 'est donc différent de zéro que si les inégalités triangulaires $\delta(j_1\, j_2\, j_{12})$, $\delta(j_3\, j_4\, j_{34})$, $\delta(j_{13}\, j_{24}\, J)$, $\delta(j_1\, j_3\, j_{13})$, $\delta(j_2\, j_4\, j_{24})$ et $\delta(j_{12}\, j_{34}\, J)$ sont toutes satisfaites.

Pour étudier les propriétés de symétrie du symbole 9j, il est plus commode de remplacer les coefficients de Clebsch-Gordan par des symboles 3j.

On a en vertu de (II 6.2) :

$$\begin{Bmatrix} j_1 & j_2 & j_{12} \\ j_3 & j_4 & j_{34} \\ j_{13} & j_{24} & J \end{Bmatrix} = \Big[(2j_{12}+1)(2j_{34}+1)(2j_{13}+1)(2j_{24}+1) \Big]^{-\frac{1}{2}} (2J+1)^{-1}$$

$$\times \Big[(2j_{12}+1)(2j_{34}+1)(2j_{13}+1)(2j_{24}+1)(2J+1)^2 \Big]^{\frac{1}{2}} \sum_{\substack{m_1\, m_2\, m_3\, m_4 \\ m_{12}\, m_{34}\, m_{13}\, m_{24}\, M}}$$

$$\Big\{ (-1)^{j_1-j_2+m_{12}+j_3-j_4+m_{34}+j_{12}-j_{34}+M+j_1-j_3+m_{13}+j_2-j_4+m_{24}+j_{13}-j_{24}+M}$$

$$\begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_{12} \\ m_1 & m_2 & -m_{12} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} j_3 & j_4 & j_{34} \\ m_3 & m_4 & -m_{34} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} j_{12} & j_{34} & J \\ m_{12} & m_{34} & -M \end{pmatrix} \begin{pmatrix} j_1 & j_3 & j_{13} \\ m_1 & m_3 & -m_{13} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} j_2 & j_4 & j_{24} \\ m_2 & m_4 & -m_{24} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} j_{13} & j_{24} & J \\ m_{13} & m_{24} & -M \end{pmatrix} \Big\} . \tag{4.8}$$

En changeant le signe de m_{12}, m_{34}, m_{13} et m_{24} et en utilisant la propriété de symétrie (II 6.8), on obtient

$$\begin{Bmatrix} j_1 & j_2 & j_{12} \\ j_3 & j_4 & j_{34} \\ j_{13} & j_{24} & J \end{Bmatrix} = \sum_{\substack{m_1\, m_2\, m_3\, m_4 \\ m_{12}\, m_{34}\, m_{13}\, m_{24}\, M}} \Big\{ (-1)^{2j_1-2j_4+j_{12}-j_{34}+j_{13}-j_{24}}$$

$$(-1)^{-m_{12}-m_{34}-m_{13}-m_{24}+2M} \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_{12} \\ m_1 & m_2 & m_{12} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} j_3 & j_4 & j_{34} \\ m_3 & m_4 & m_{34} \end{pmatrix} (-1)^{j_{12}+j_{34}+J}$$

$$\begin{pmatrix} j_{12} & j_{34} & J \\ m_{12} & m_{34} & M \end{pmatrix} \begin{pmatrix} j_1 & j_3 & j_{13} \\ m_1 & m_3 & m_{13} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} j_2 & j_4 & j_{24} \\ m_2 & m_4 & m_{24} \end{pmatrix} (-1)^{j_{13}+j_{24}+J} \begin{pmatrix} j_{13} & j_{24} & J \\ m_{13} & m_{24} & M \end{pmatrix} \Big\} . \tag{4.9}$$

La phase est égale à

$$(-1)^{2j_1-2j_4+2j_{12}+2j_{13}+2J-(m_{12}+m_{34}+M)-(m_{13}+m_{24}+M)+4M}$$

$$= (-1)^{(2j_1+2j_2+2j_{12})-(2j_2+2j_4+2j_{24})+(2j_{13}+2j_{24}+2J)} = +1. \tag{4.10}$$

Par conséquent

$$\begin{Bmatrix} j_1 & j_2 & j_{12} \\ j_3 & j_4 & j_{34} \\ j_{13} & j_{24} & J \end{Bmatrix} = \sum_{\substack{m_1 m_2 m_3 m_4 \\ m_{12} m_{34} m_{13} m_{24} M}} \left\{ \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_{12} \\ m_1 & m_2 & m_{12} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} j_3 & j_4 & j_{34} \\ m_3 & m_4 & m_{34} \end{pmatrix} \right.$$

$$\left. \begin{pmatrix} j_{12} & j_{34} & J \\ m_{12} & m_{34} & M \end{pmatrix} \begin{pmatrix} j_1 & j_3 & j_{13} \\ m_1 & m_3 & m_{13} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} j_2 & j_4 & j_{24} \\ m_2 & m_4 & m_{24} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} j_{13} & j_{24} & J \\ m_{13} & m_{24} & M \end{pmatrix} \right\}. \tag{4.11}$$

Examinons maintenant les propriétés de symétrie de (4.11).

(i) Permutation des lignes

On a

$$\begin{Bmatrix} j_3 & j_4 & j_{34} \\ j_1 & j_2 & j_{12} \\ j_{13} & j_{24} & J \end{Bmatrix} = \sum_{\substack{m_1 m_2 m_3 m_4 \\ m_{12} m_{34} m_{13} m_{24} M}} \left\{ \begin{pmatrix} j_3 & j_4 & j_{34} \\ m_3 & m_4 & m_{34} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_{12} \\ m_1 & m_2 & m_{12} \end{pmatrix} \right.$$

$$\left. \begin{pmatrix} j_{34} & j_{12} & J \\ m_{34} & m_{12} & M \end{pmatrix} \begin{pmatrix} j_3 & j_1 & j_{13} \\ m_3 & m_1 & m_{13} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} j_4 & j_2 & j_{24} \\ m_4 & m_2 & m_{24} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} j_{13} & j_{24} & J \\ m_{13} & m_{24} & M \end{pmatrix} \right\}, \tag{4.12}$$

en changeant les indices de sommation m_1, m_2, m_{12}, m_3, m_4 et m_{34} en m_3, m_4, m_{34}, m_1, m_2 et m_{12} respectivement . L'application de la relation (II 6.6) aux 3^e, 4^e et 5^e symboles 3j conduit à

$$\begin{Bmatrix} j_3 & j_4 & j_{34} \\ j_1 & j_2 & j_{12} \\ j_{13} & j_{24} & J \end{Bmatrix} = (-1)^{j_{12}+j_{34}+J+j_1+j_3+j_{13}+j_2+j_4+j_{24}} \begin{Bmatrix} j_1 & j_2 & j_{12} \\ j_3 & j_4 & j_{34} \\ j_{13} & j_{24} & J \end{Bmatrix} . \tag{4.13}$$

On démontre de la même manière que toute permutation impaire des lignes donne lieu à un changement de signe de

$$(-1)^{\lambda} = (-1)^{j_1 + j_2 + j_3 + j_4 + j_{12} + j_{34} + j_{13} + j_{24} + J}, \qquad (4.14)$$

tandis que toute permutation paire se fait sans changement de signe :

$$\begin{Bmatrix} j_1 & j_2 & j_{12} \\ j_3 & j_4 & j_{34} \\ j_{13} & j_{24} & J \end{Bmatrix} = (-1)^{\lambda} \begin{Bmatrix} j_3 & j_4 & j_{34} \\ j_1 & j_2 & j_{12} \\ j_{13} & j_{24} & J \end{Bmatrix} = (-1)^{\lambda} \begin{Bmatrix} j_{13} & j_{24} & J \\ j_3 & j_4 & j_{34} \\ j_1 & j_2 & j_{12} \end{Bmatrix}$$

$$= (-1)^{\lambda} \begin{Bmatrix} j_1 & j_2 & j_{12} \\ j_{13} & j_{24} & J \\ j_3 & j_4 & j_{34} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} j_3 & j_4 & j_{34} \\ j_{13} & j_{24} & J \\ j_1 & j_2 & j_{12} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} j_{13} & j_{24} & J \\ j_1 & j_2 & j_{12} \\ j_3 & j_4 & j_{34} \end{Bmatrix}. \qquad (4.15)$$

(ii) Transposition

Par transposition, on entend le changement des lignes en colonnes dans le symbole 9j. Cette opération n'entraîne qu'une permutation des trois premiers symboles 3j avec les trois derniers dans (4.11), par conséquent

$$\begin{Bmatrix} j_1 & j_2 & j_{12} \\ j_3 & j_4 & j_{34} \\ j_{13} & j_{24} & J \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} j_1 & j_3 & j_{13} \\ j_2 & j_4 & j_{24} \\ j_{12} & j_{34} & J \end{Bmatrix}. \qquad (4.16)$$

(iii) Permutation des colonnes

La combinaison de (4.15) et (4.16) montre que toute permutation impaire des colonnes donne lieu à un changement de signe de $(-1)^{\lambda}$, tandis que toute permutation paire se fait sans changement de signe:

$$\begin{Bmatrix} j_1 & j_2 & j_{12} \\ j_3 & j_4 & j_{34} \\ j_{13} & j_{24} & J \end{Bmatrix} = (-1)^{\lambda} \begin{Bmatrix} j_2 & j_1 & j_{12} \\ j_4 & j_3 & j_{34} \\ j_{24} & j_{13} & J \end{Bmatrix} = (-1)^{\lambda} \begin{Bmatrix} j_{12} & j_2 & j_1 \\ j_{34} & j_4 & j_3 \\ J & j_{24} & j_{13} \end{Bmatrix}$$

$$= (-1)^{\lambda} \begin{Bmatrix} j_1 & j_{12} & j_2 \\ j_3 & j_{34} & j_4 \\ j_{13} & J & j_{24} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} j_2 & j_{12} & j_1 \\ j_4 & j_{34} & j_3 \\ j_{24} & J & j_{13} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} j_{12} & j_1 & j_2 \\ j_{34} & j_3 & j_4 \\ J & j_{13} & j_{24} \end{Bmatrix} . \qquad (4.17)$$

Le produit des six opérations (4.15) avec les deux opérations (4.16) et les six opérations (4.17) conduit donc à septante-deux opérations de symétrie qui changent tout au plus le signe d'un symbole 9j quelconque.

Les relations d'orthogonalité (3.11) et (3.12) conduisent, en raison de la symétrie par transposition (4.16), à une seule relation pour les symboles 9j :

$$\sum_{j_{12}\, j_{34}} (2j_{12}+1)(2j_{34}+1)(2j_{13}+1)(2j_{24}+1) \begin{Bmatrix} j_1 & j_2 & j_{12} \\ j_3 & j_4 & j_{34} \\ j_{13} & j_{24} & J \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} j_1 & j_2 & j_{12} \\ j_3 & j_4 & j_{34} \\ j'_{13} & j'_{24} & J \end{Bmatrix}$$

$$= \delta_{j_{13}\, j'_{13}} \; \delta_{j_{24}\, j'_{24}} \, . \qquad (4.18)$$

Lorsque l'un des neuf moments cinétiques, qui interviennent dans la définition du symbole 9j, est nul, ce dernier est proportionnel à un symbole 6j. Par l'usage des relations de symétrie, on peut toujours amener le moment cinétique nul à la place de J, par conséquent il suffit de considérer le cas où J = o. La relation (4.2) s'écrit sous la forme

$$\begin{Bmatrix} j_1 & j_2 & j_{12} \\ j_3 & j_4 & j_{34} \\ j_{13} & j_{24} & J \end{Bmatrix} = \sum_K (-1)^{2K} (2K+1) \begin{Bmatrix} j_1 & j_2 & j_{12} \\ j_{34} & 0 & K \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} j_3 & j_4 & j_{34} \\ j_2 & K & j_{24} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} j_{13} & j_{24} & 0 \\ K & j_1 & j_3 \end{Bmatrix} \quad (4.19)$$

où

$$\begin{Bmatrix} j_1 & j_2 & j_{12} \\ j_{34} & 0 & K \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} j_1 & j_{12} & j_2 \\ j_{34} & K & 0 \end{Bmatrix}$$ en vertu de (2.13)

$$= \delta_{Kj_1} \delta_{j_{34} j_{12}} \frac{(-1)^{j_1+j_2+j_{12}}}{\sqrt{(2j_1+1)(2j_{12}+1)}}$$ en vertu de (2.24), (4.20)

$$\begin{Bmatrix} j_{13} & j_{24} & 0 \\ K & j_1 & j_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} j_{13} & j_1 & j_3 \\ K & j_{24} & 0 \end{Bmatrix}$$ en vertu de (2.18)

$$= \delta_{Kj_1} \delta_{j_{24} j_{13}} \frac{(-1)^{j_1+j_3+j_{13}}}{\sqrt{(2j_1+1)(2j_{13}+1)}}$$ en vertu de (2.24), (4.21)

$$\begin{Bmatrix} j_3 & j_4 & j_{34} \\ j_2 & K & j_{24} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} K & j_2 & j_{34} \\ j_4 & j_3 & j_{24} \end{Bmatrix}$$ en vertu de (2.12) et (2.19).

(4.22)

En combinant ces diverses relations,on trouve

$$\begin{Bmatrix} j_1 & j_2 & j_{12} \\ j_3 & j_4 & j_{34} \\ j_{13} & j_{24} & 0 \end{Bmatrix} = \delta_{j_{34} j_{12}} \delta_{j_{24} j_{13}} \frac{(-1)^{j_2+j_3+j_{12}+j_{13}}}{\sqrt{(2j_{12}+1)(2j_{13}+1)}} \begin{Bmatrix} j_1 & j_2 & j_{12} \\ j_4 & j_3 & j_{13} \end{Bmatrix}. \quad (4.23)$$

5. Couplage l-s et couplage j-j

Considérons deux particules de spin $\frac{1}{2}$ dans un champ central. Ce sont par exemple deux électrons d'un atome ou deux protons ou neutrons d'un noyau. Les particules sont placées dans deux orbites de nombres quantiques n_a , ℓ_a et n_b, ℓ_b respectivement. Le moment cinétique total du système résulte de l'addition des deux moments cinétiques orbitaux et des deux moments cinétiques de spin :

$$\bar{J} = \bar{\ell}_a + \bar{\ell}_b + \bar{\tfrac{1}{2}} + \bar{\tfrac{1}{2}} \, . \tag{5.1}$$

On utilise couramment deux modes de couplage différents : le couplage ℓ-s, dans lequel on additionne d'abord les moments cinétiques orbitaux d'une part et les spins d'autre part, et le couplage j-j, dans lequel on couple d'abord le moment cinétique orbital et le moment cinétique de spin de chaque particule.

Pour obtenir la fonction d'onde totale du système de deux particules, il y a lieu de tenir compte en outre d'une condition supplémentaire, liée à la statistique à laquelle obéissent ces particules. Des particules de spin $\frac{1}{2}$ sont des fermions, par conséquent leur fonction d'onde totale doit être antisymétrique par rapport à la permutation des particules. Dans la représentation non couplée, elle s'écrit sous la forme

$$\begin{aligned} &\left| n_a \, \ell_a \, m_{\ell_a} \, \tfrac{1}{2} \, m_{s_a} , n_b \, \ell_b \, m_{\ell_b} \, \tfrac{1}{2} \, m_{s_b} \right\rangle_A \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \Big[\left| n_a \, \ell_a \, m_{\ell_a} \, \tfrac{1}{2} \, m_{s_a} , n_b \, \ell_b \, m_{\ell_b} \, \tfrac{1}{2} \, m_{s_b} \right\rangle \\ &\qquad - \left| n_b \, \ell_b \, m_{\ell_b} \, \tfrac{1}{2} \, m_{s_b} , n_a \, \ell_a \, m_{\ell_a} \, \tfrac{1}{2} \, m_{s_a} \right\rangle \Big] , \end{aligned} \tag{5.2}$$

dans laquelle on convient d'écrire, dans un vecteur non antisymétrisé, les nombres quantiques de la particule 1 en premier lieu, ceux de la particule 2 en second lieu :

$$\left| n_a \ell_a m_{\ell_a} \tfrac{1}{2} m_{s_a} , n_b \ell_b m_{\ell_b} \tfrac{1}{2} m_{s_b} \right\rangle$$

$$= \psi_{n_a \ell_a m_{\ell_a}} (\bar{r}_1) \chi_{m_{s_a}} (1) \psi_{n_b \ell_b m_{\ell_b}} (\bar{r}_2) \chi_{m_{s_b}} (2), \tag{5.3}$$

$$\left| n_b \ell_b m_{\ell_b} \tfrac{1}{2} m_{s_b} , n_a \ell_a m_{\ell_a} \tfrac{1}{2} m_{s_a} \right\rangle$$

$$= \psi_{n_b \ell_b m_{\ell_b}} (\bar{r}_1) \chi_{m_{s_b}} (1) \psi_{n_a \ell_a m_{\ell_a}} (\bar{r}_2) \chi_{m_{s_a}} (2). \tag{5.4}$$

Notons que les nombres quantiques des deux particules ne peuvent être identiques, car dans ce cas la fonction d'onde (5.2) s'annulerait. Ceci est une conséquence du principe d'exclusion de Pauli, selon lequel deux fermions ne peuvent occuper le même état quantique individuel.

Nous allons étudier maintenant la construction de fonctions d'onde antisymétriques dans l'un et l'autre modes de couplage et les relations qui existent entre elles.

5.1. Couplage ℓ-s

La fonction d'onde totale est caractérisée par les valeurs du moment cinétique orbital total

$$\bar{L} = \bar{\ell}_a + \bar{\ell}_b \tag{5.5}$$

et du moment cinétique de spin total

$$\bar{S} = \bar{\tfrac{1}{2}} + \bar{\tfrac{1}{2}} . \tag{5.6}$$

Avant l'antisymétrisation, elle est donnée par

$$|n_a l_a \tfrac{1}{2} n_b l_b \tfrac{1}{2} L S J M\rangle = \sum_{M_L M_S} \langle L M_L S M_S | J M\rangle$$
$$|n_a l_a n_b l_b L M_L\rangle \, |\tfrac{1}{2} \tfrac{1}{2} S M_S\rangle , \qquad (5.7)$$

où

$$|n_a l_a n_b l_b L M_L\rangle = \sum_{m_{l_a} m_{l_b}} \langle l_a m_{l_a} l_b m_{l_b} | L M_L\rangle \, |n_a l_a m_{l_a}, n_b l_b m_{l_b}\rangle \qquad (5.8)$$

est la fonction d'onde orbitale et

$$|\tfrac{1}{2} \tfrac{1}{2} S M_S\rangle = \sum_{m_{s_a} m_{s_b}} \langle \tfrac{1}{2} m_{s_a} \tfrac{1}{2} m_{s_b} | S M_S\rangle \, |\tfrac{1}{2} m_{s_a}, \tfrac{1}{2} m_{s_b}\rangle \qquad (5.9)$$

la fonction d'onde de spin des deux particules. L'antisymétrisation conduit à des résultats différents suivant que les particules sont ou non équivalentes, c'est-à-dire suivant que $(n_a l_a)$ et $(n_b l_b)$ sont égaux ou différents.

(i) Particules inéquivalentes

Une fonction d'onde antisymétrique normée s'obtient à partir de (5.7) en lui appliquant l'opérateur $\frac{1}{\sqrt{2}}\left[1 - P_{12}\right]$, où P_{12} est l'opérateur de permutation des deux particules. L'action de P_{12} sur les fonctions d'onde orbitale et de spin, prises séparément, est donnée par

$$P_{12} \, |n_a l_a n_b l_b L M_L\rangle = \sum_{m_{l_a} m_{l_b}} \langle l_a m_{l_a} l_b m_{l_b} | L M_L\rangle \, |n_b l_b m_{l_b}, n_a l_a m_{l_a}\rangle \qquad (5.10)$$

et

$$P_{12} \, |\tfrac{1}{2} \tfrac{1}{2} S M_S\rangle = \sum_{m_{s_a} m_{s_b}} \langle \tfrac{1}{2} m_{s_a} \tfrac{1}{2} m_{s_b} | S M_S\rangle \, |\tfrac{1}{2} m_{s_b}, \tfrac{1}{2} m_{s_a}\rangle . \qquad (5.11)$$

Par conséquent

$$|n_a \ell_a \tfrac{1}{2}, n_b \ell_b \tfrac{1}{2}, LSJM\rangle_A = \sum_{\substack{m_{\ell_a} m_{\ell_b} m_{s_a} m_{s_b} \\ M_L M_S}} \langle \ell_a m_{\ell_a} \ell_b m_{\ell_b} | L M_L \rangle$$

$$\langle \tfrac{1}{2} m_{s_a} \tfrac{1}{2} m_{s_b} | S M_S \rangle \langle L M_L S M_S | J M \rangle \, |n_a \ell_a m_{\ell_a} \tfrac{1}{2} m_{s_a}, n_b \ell_b m_{\ell_b} \tfrac{1}{2} m_{s_b}\rangle_A, \quad (5.12)$$

en tenant compte de (5.2).

Les valeurs possibles de S sont 0 et 1 ; à S = o correspond J = L et à S = 1 correspondent J = L et L ± 1. A une valeur donnée de J sont donc associées en général quatre valeurs du couple (L,S) : (J, o), (J-1, 1), (J, 1) et(J+1, 1).

(ii) Particules équivalentes

Quand $(n_a \ell_a) = (n_b \ell_b) = (n \ell)$, les relations (5.10) et (5.11) deviennent

$$\begin{aligned} P_{12} \, |(n\ell)^2 L M_L\rangle &= \sum_{m_\ell m'_\ell} \langle \ell m_\ell \ell m'_\ell | L M_L \rangle \, |n\ell m'_\ell, n\ell m_\ell\rangle \\ &= \sum_{m_\ell m'_\ell} \langle \ell m'_\ell \ell m_\ell | L M_L \rangle \, |n\ell m_\ell, n\ell m'_\ell\rangle \\ &= (-1)^{2\ell - L} \sum_{m_\ell m'_\ell} \langle \ell m_\ell \ell m'_\ell | L M_L \rangle \, |n\ell m_\ell, n\ell m'_\ell\rangle \\ &= (-1)^{2\ell - L} \, |(n\ell)^2 L M_L\rangle \end{aligned} \quad (5.13)$$

et

$$\begin{aligned} P_{12} \, |(\tfrac{1}{2})^2 S M_S\rangle &= \sum_{m_s m'_s} \langle \tfrac{1}{2} m_s \tfrac{1}{2} m'_s | S M_S \rangle \, |\tfrac{1}{2} m'_s, \tfrac{1}{2} m_s\rangle \\ &= \sum_{m_s m'_s} \langle \tfrac{1}{2} m'_s \tfrac{1}{2} m_s | S M_S \rangle \, |\tfrac{1}{2} m_s, \tfrac{1}{2} m'_s\rangle \\ &= (-1)^{1-S} \sum_{m_s m'_s} \langle \tfrac{1}{2} m_s \tfrac{1}{2} m'_s | S M_S \rangle \, |\tfrac{1}{2} m_s, \tfrac{1}{2} m'_s\rangle \\ &= (-1)^{1-S} \, |(\tfrac{1}{2})^2 S M_S\rangle . \end{aligned} \quad (5.14)$$

Dans chacune des relations , on a utilisé successivement une permutation des indices de sommation et la propriété de symétrie (II 4.13) des coefficients de Clebsch-Gordan. On obtient par conséquent

$$\mathcal{P}_{12} \; | (n\ell\tfrac{1}{2})^2 LSJM \rangle = (-1)^{2\ell - L + 1 - S} \; | (n\ell\tfrac{1}{2})^2 LSJM \rangle$$

$$= -(-1)^{L+S} \; | (n\ell\tfrac{1}{2})^2 LSJM \rangle , \qquad (5.15)$$

de telle sorte que la fonction d'onde (5.7) est antisymétrique à condition que L + S soit pair :

$$| (n\ell\tfrac{1}{2})^2 LSJM \rangle_A = | (n\ell\tfrac{1}{2})^2 LSJM \rangle \quad \text{si } L+S \text{ pair.} \qquad (5.16)$$

Ceci réduit donc les valeurs possibles du couple (L, S) pour une valeur donnée de J. Si J est pair, les valeurs admises de (L, S) sont (J, o), (J-1,1) et (J+1,1). Si J est impair, on a seulement (J,1).

La notation spectroscopique usuelle pour L, S et J est $^{2S+1}L_J$, où l'on utilise, pour indiquer la valeur de L, l'une des lettres S, P, D, F,... (cf. chap. II § 1.1). Les exemples du couplage d'une particule dans une orbite d (ℓ = 2) avec une particule dans une orbite f (ℓ=3) et de deux particules dans une orbite f sont donnés dans les tables ci-dessous.

Table des valeurs possibles de L, S et J pour une particule d et une particule f.

L	S	J	$^{2S+1}L_J$
1	o	1	$^1P_1$
	1	o,1,2	^3P_o, $^3P_1$, $^3P_2$
2	o	2	$^1D_2$
	1	1,2,3	$^3D_1$, $^3D_2$, $^3D_3$
3	o	3	$^1F_3$

	1	2,3,4	$^3F_2$, $^3F_3$, $^3F_4$
4	0	4	$^1G_4$
	1	3,4,5	$^3G_3$, $^3G_4$, $^3G_5$
5	0	5	$^1H_5$
	1	4,5,6	$^3H_4$, $^3H_5$, $^3H_6$

Table des valeurs possibles de L, S et J pour deux particules f

L	S	J	$^{2S+1}L_J$
0	0	0	$^1S_0$
1	1	0,1,2	$^3P_0$, $^3P_1$, $^3P_2$
2	0	2	$^1D_2$
3	1	2,3,4	$^3F_2$, $^3F_3$, $^3F_4$
4	0	4	$^1G_4$
5	1	4,5,6	$^3H_4$, $^3H_5$, $^3H_6$
6	0	6	$^1I_6$

5.2. Couplage j-j

La fonction d'onde totale est caractérisée par les valeurs des moments cinétiques totaux des particules dans les deux orbites

$$\bar{j}_a = \bar{\ell}_a + \overline{\tfrac{1}{2}} \ , \tag{5.17}$$

$$\bar{j}_b = \bar{\ell}_b + \overline{\tfrac{1}{2}} \ . \tag{5.18}$$

Avant l'antisymétrisation, elle est donnée par

$$|n_a \ell_a \tfrac{1}{2} j_a \; n_b \ell_b \tfrac{1}{2} j_b \; JM\rangle = \sum_{m_a m_b} \langle j_a m_a \; j_b m_b | JM\rangle$$

$$|n_a \ell_a \tfrac{1}{2} j_a m_a , n_b \ell_b \tfrac{1}{2} j_b m_b\rangle , \tag{5.19}$$

où

$$|n_a \ell_a \tfrac{1}{2} j_a m_a\rangle = \sum_{m_{\ell_a} m_{s_a}} \langle \ell_a m_{\ell_a} \tfrac{1}{2} m_{s_a} | j_a m_a\rangle \, |n_a \ell_a m_{\ell_a} \tfrac{1}{2} m_{s_a}\rangle \tag{5.20}$$

est la fonction d'onde totale de la particule 1 dans l'orbite $n_a \ell_a$ et

$$|n_b \ell_b \tfrac{1}{2} j_b m_b\rangle = \sum_{m_{\ell_b} m_{s_b}} \langle \ell_b m_{\ell_b} \tfrac{1}{2} m_{s_b} | j_b m_b\rangle \, |n_b \ell_b m_{\ell_b} \tfrac{1}{2} m_{s_b}\rangle \tag{5.21}$$

celle de la particule 2 dans l'orbite $n_b \ell_b$. Comme pour le couplage ℓ-s, l'antisymétrisation conduit à des résultats différents suivant que les particules sont ou non équivalentes, c'est-à-dire suivant que $(n_a \ell_a j_a)$ et $(n_b \ell_b j_b)$ sont égaux ou différents.

(i) Particules inéquivalentes

L'action de l'opérateur de permutation P_{12} sur la fonction d'onde (5.19) est donnée par

$$P_{12} \, |n_a \ell_a \tfrac{1}{2} j_a \; n_b \ell_b \tfrac{1}{2} j_b \; JM\rangle = \sum_{m_a m_b} \langle j_a m_a \; j_b m_b | JM\rangle$$

$$|n_b \ell_b \tfrac{1}{2} j_b m_b , n_a \ell_a \tfrac{1}{2} j_a m_a\rangle . \tag{5.22}$$

Par conséquent, la fonction d'onde antisymétrique, obtenue par l'application de $\frac{1}{\sqrt{2}}\left[1 - P_{12}\right]$, est égale à

$$|n_a l_a \tfrac{1}{2} j_a\, n_b l_b \tfrac{1}{2} j_b\, JM\rangle_A = \sum_{\substack{m_{l_a} m_{s_a} m_a \\ m_{l_b} m_{s_b} m_b}} \langle l_a m_{l_a} \tfrac{1}{2} m_{s_a} | j_a m_a\rangle$$

$$\langle l_b m_{l_b} \tfrac{1}{2} m_{s_b} | j_b m_b\rangle \langle j_a m_a j_b m_b | JM\rangle \; |n_a l_a m_{l_a} \tfrac{1}{2} m_{s_a}, n_b l_b m_{l_b} \tfrac{1}{2} m_{s_b}\rangle_A . \tag{5.23}$$

Les valeurs possibles de j_a et j_b sont $j_a = l_a \pm \frac{1}{2}$ et $j_b = l_b \pm \frac{1}{2}$ respectivement et celles de J sont $|j_a - j_b|$, $|j_a - j_b| + 1, \ldots , j_a + j_b$. A une valeur donnée de J sont donc associées en général quatre valeurs du couple (j_a, j_b) : $(l_a - \frac{1}{2}, l_b - \frac{1}{2})$, $(l_a - \frac{1}{2}, l_b + \frac{1}{2})$, $(l_a + \frac{1}{2}, l_b - \frac{1}{2})$ et $(l_a + \frac{1}{2}, l_b + \frac{1}{2})$.

(ii) Particules équivalentes

Quand $(n_a l_a j_a) = (n_b l_b j_b) = (n l j)$, la relation (5.22) devient

$$\begin{aligned}
P_{12}\, |(n l \tfrac{1}{2} j)^2 JM\rangle &= \sum_{mm'} \langle j m j m' | JM\rangle\, |n l \tfrac{1}{2} j m', n l \tfrac{1}{2} j m\rangle \\
&= \sum_{mm'} \langle j m' j m | JM\rangle\, |n l \tfrac{1}{2} j m, n l \tfrac{1}{2} j m'\rangle \\
&= (-1)^{2j-J} \sum_{mm'} \langle j m j m' | JM\rangle\, |n l \tfrac{1}{2} j m, n l \tfrac{1}{2} j m'\rangle \\
&= -(-1)^{J}\, |(n l \tfrac{1}{2} j)^2 JM\rangle ,
\end{aligned} \tag{5.24}$$

en utilisant successivement une permutation des indices de sommation et la propriété de symétrie (II 4.13) des coefficients de Clebsch-Gordan. Par conséquent la fonction d'onde (5.19) est antisymétrique à condition que J soit pair :

$$|(n l \tfrac{1}{2} j)^2 JM\rangle_A = |(n l \tfrac{1}{2} j)^2 JM\rangle \quad \text{si J pair.} \tag{5.25}$$

La notation spectroscopique usuelle pour deux particules en couplage j-j est $n_a \ell_{a\, j_a}\ n_b \ell_{b\, j_b}\ J$, où l'on utilise pour indiquer les valeurs de ℓ_a et ℓ_b , l'une quelconque des lettres s, p, d, f,... (cf. chap. II § 1.1). Les exemples du couplage d'une particule dans une orbite d avec une particule dans une orbite f et de deux particules dans une orbite f sont donnés dans les tables ci-dessous.

Table des valeurs possibles de j_a, j_b et J pour une particule d et une particule f

j_a	j_b	J	$\ell_{a j_a}\ \ell_{b j_b}\ J$
$\frac{3}{2}$	$\frac{5}{2}$	1	$d_{3/2}\ f_{5/2}\ 1$
		2	$d_{3/2}\ f_{5/2}\ 2$
		3	$d_{3/2}\ f_{5/2}\ 3$
		4	$d_{3/2}\ f_{5/2}\ 4$
$\frac{3}{2}$	$\frac{7}{2}$	2	$d_{3/2}\ f_{7/2}\ 2$
		3	$d_{3/2}\ f_{7/2}\ 3$
		4	$d_{3/2}\ f_{7/2}\ 4$
		5	$d_{3/2}\ f_{7/2}\ 5$
$\frac{5}{2}$	$\frac{5}{2}$	0	$d_{5/2}\ f_{5/2}\ 0$
		1	$d_{5/2}\ f_{5/2}\ 1$
		2	$d_{5/2}\ f_{5/2}\ 2$
		3	$d_{5/2}\ f_{5/2}\ 3$
		4	$d_{5/2}\ f_{5/2}\ 4$
		5	$d_{5/2}\ f_{5/2}\ 5$

$\frac{5}{2}$	$\frac{7}{2}$	1	$d_{5/2}\ f_{7/2}\ 1$
		2	$d_{5/2}\ f_{7/2}\ 2$
		3	$d_{5/2}\ f_{7/2}\ 3$
		4	$d_{5/2}\ f_{7/2}\ 4$
		5	$d_{5/2}\ f_{7/2}\ 5$
		6	$d_{5/2}\ f_{7/2}\ 6$

Table des valeurs possibles de j_a, j_b et J pour deux particules f

j_a	j_b	J	$\ell_{a j_a}\ \ell_{b j_b}\ J$
$\frac{5}{2}$	$\frac{5}{2}$	o	$(f_{5/2})^2$ o
		2	$(f_{5/2})^2$ 2
		4	$(f_{5/2})^2$ 4
$\frac{5}{2}$	$\frac{7}{2}$	1	$f_{5/2}\ f_{7/2}\ 1$
		2	$f_{5/2}\ f_{7/2}\ 2$
		3	$f_{5/2}\ f_{7/2}\ 3$
		4	$f_{5/2}\ f_{7/2}\ 4$
		5	$f_{5/2}\ f_{7/2}\ 5$
		6	$f_{5/2}\ f_{7/2}\ 6$
$\frac{7}{2}$	$\frac{7}{2}$	o	$(f_{7/2})^2$ o
		2	$(f_{7/2})^2$ 2
		4	$(f_{7/2})^2$ 4
		6	$(f_{7/2})^2$ 6

5.3. Passage d'un mode de couplage à l'autre

L'utilisation de l'un ou de l'autre mode de couplage dans un problème physique particulier dépend de la nature de l'interaction résiduelle W. Il est en effet souvent plus simple de calculer les éléments de matrice de W dans une des représentations plutôt que dans l'autre. Il peut arriver également que W se compose de deux termes et que l'un de ceux-ci ait des éléments de matrice plus simples dans une des représentations alors que pour l'autre terme il soit plus commode d'utiliser l'autre représentation. Il est alors nécessaire de pouvoir passer d'une représentation à l'autre. Cette transformation met en jeu un changement de couplage de quatre moments cinétiques et se fait donc au moyen de symboles 9j. Pour les fonctions d'onde non antisymétrisées, on a

$$|n_a \ell_a \tfrac{1}{2} j_a \; n_b \ell_b \tfrac{1}{2} j_b \; JM\rangle = \sum_{LS} \left[(2j_a+1)(2j_b+1)(2L+1)(2S+1)\right]^{\frac{1}{2}} \begin{Bmatrix} \ell_a & \frac{1}{2} & j_a \\ \ell_b & \frac{1}{2} & j_b \\ L & S & J \end{Bmatrix} |n_a \ell_a \tfrac{1}{2} \; n_b \ell_b \tfrac{1}{2} \; LSJM\rangle \tag{5.26}$$

et

$$|n_a \ell_a \tfrac{1}{2} \; n_b \ell_b \tfrac{1}{2} \; LSJM\rangle = \sum_{j_a j_b} \left[(2j_a+1)(2j_b+1)(2L+1)(2S+1)\right]^{\frac{1}{2}} \begin{Bmatrix} \ell_a & \frac{1}{2} & j_a \\ \ell_b & \frac{1}{2} & j_b \\ L & S & J \end{Bmatrix} |n_a \ell_a \tfrac{1}{2} j_a \; n_b \ell_b \tfrac{1}{2} j_b \; JM\rangle . \tag{5.27}$$

La transformation des fonctions d'onde antisymétrisées se déduit aisément de ces relations.