V OPERATEURS TENSORIELS IRREDUCTIBLES

1. Définition des opérateurs tensoriels irréductibles

Lorsqu'on étudie les changements (linéaires) de système de coordonnées, on est amené à la notion de tenseur. Le type le plus familier de tenseur est le tenseur cartésien. Sous l'effet d'une transformation linéaire quelconque

$$x' = a\,x \quad , \tag{1.1}$$

les composantes $T_{i_1\, i_2 \ldots i_n}$ d'un tenseur cartésien de rang n (nous ne faisons pas de différence entre tenseurs covariants et tenseurs contravariants) se transforment en *

$$T'_{i_1 i_2 \ldots i_n} = \sum_{j_1 j_2 \cdots j_n} a_{i_1 j_1}\, a_{i_2 j_2} \cdots a_{i_n j_n}\, T_{j_1 j_2 \cdots j_n} \,. \tag{1.2}$$

Dans l'étude des rotations, on se restreint aux transformations linéaires orthogonales. Considérons par exemple le tenseur de rang 2 obtenu en prenant les neuf produits des composantes de deux vecteurs $\bar{x}$ et $\bar{y}$. Les composantes de ce tenseur sont donc

$$T_{ij} = x_i\, y_j \qquad\qquad i, j = 1, 2, 3 . \tag{1.3}$$

Il est bien connu que sous l'effet des transformations linéaires générales, le tenseur se sépare en un tenseur symétrique

$$S_{ij} = \frac{1}{2}\,(x_i\, y_j + x_j\, y_i) \tag{1.4}$$

et un tenseur antisymétrique

$$A_{ij} = \frac{1}{2}\,(x_i\, y_j - x_j\, y_i) \,, \tag{1.5}$$

---

* Ceci est la définition usuelle d'un tenseur. Pour être en accord avec la loi de transformation (IV 2.4) des fonctions d'onde, il faut remplacer dans (1.2) toutes les matrices a par des matrices a^{-1}. C'est ce que nous ferons dans la suite.

qui se transforment séparément. Lorsqu'on se restreint aux transformations orthogonales, le produit scalaire

$$S = \bar{x}\,.\,\bar{y} = \sum_i S_{ii} \tag{1.6}$$

est invariant. Le tenseur symétrique est dit réductible : il se sépare en un scalaire S et un tenseur symétrique de trace nulle

$$S'_{ij} = \frac{1}{2}\left(x_i y_j + x_j y_i - \frac{2}{3}\,\bar{x}\,.\,\bar{y}\ \delta_{ij} \right), \tag{1.7}$$

qui se transforment séparément. Ces derniers ont comme propriété qu'il est impossible de trouver des combinaisons linéaires de leurs composantes qui se transforment entre elles : on dit qu'ils sont irréductibles. La décomposition du tenseur T_{ij} en composantes irréductibles est donc

$$T_{ij} = \frac{1}{3} S\, \delta_{ij} + S'_{ij} + A_{ij}\ . \tag{1.8}$$

De cette manière, on peut en principe construire à partir de vecteurs des tenseurs irréductibles de n'importe quel rang. Il suffit de soustraire toutes les quantités qui restent invariantes dans les transformations orthogonales.

Cette représentation des tenseurs irréductibles n'est cependant pas très commode car leurs propriétés de transformation ne s'écrivent pas de manière simple. Par exemple, x_1, x_2 et x_3 sont les composantes d'un tenseur irréductible de rang 1, mais il est plus commode de considérer le tenseur de composantes x_{+1}, x_o et x_{-1} données par (IV 6.5a) et proportionnelles à $r\,Y_{1m}(\theta,\varphi)$ m = +1, o, -1, car il se transforme au moyen de la matrice $\mathcal{D}^1$. Pour cette raison il est plus utile d'étudier les tenseurs irréductibles dans la représentation des coordonnées sphériques, plutôt que sous la forme cartésienne. Les tenseurs exprimés de cette manière sont appelés tenseurs sphériques. Ils ont pour propriété de se transformer par rotation de la même manière que les fonctions $r^\ell\, Y_{\ell m}(\theta,\varphi)$. Le concept de tenseur sphérique est étendu à celui d'opérateur tensoriel irréductible.

Par définition, un opérateur tensoriel irréductible de rang k est un ensemble de 2k+1 opérateurs T^k_q (q = -k, -k+1, ...,k) qui se transforment par rotation de la même manière que les états $|k\,q\rangle$, c'est-à-dire tels que

$$T'^{k}_{q} = P_{R(\alpha,\beta,\gamma)}\, T^{k}_{q}\, P^{+}_{R(\alpha,\beta,\gamma)} = \sum_{q'} T^{k}_{q'}\, \mathcal{D}^{k}_{q'q}(\alpha,\beta,\gamma). \tag{1.9}$$

Comme conséquence de la définition, si T^k_q se transforme en T'^k_q par la rotation R_1 et que T'^k_q se transforme en T''^k_q par la rotation R_2, alors T^k_q se transforme en T''^k_q par la rotation $R_2\,R_1$ (cf. IV 2.14)).

En particulier toute observable invariante par rotation est un opérateur tensoriel de rang nul

$$S = T^{0}_{0}\,. \tag{1.10}$$

En effet, en tenant compte de ce que $\mathcal{D}^{0}_{00}(\alpha,\beta,\gamma) = 1$, la relation (1.9) devient pour k = q = o

$$T'^{0}_{0} = P_{R(\alpha,\beta,\gamma)}\, T^{0}_{0}\, P^{+}_{R(\alpha,\beta,\gamma)} = T^{0}_{0}\,, \tag{1.11}$$

ce qui coïncide avec la relation (IV 2.20) qui sert de définition aux opérateurs invariants par rotation.

D'autre part, tout opérateur vectoriel est un opérateur tensoriel irréductible de rang 1

$$V_q = T^{1}_{q} \qquad q = -1, 0, +1\,. \tag{1.12}$$

Montrons que la loi de transformation (IV 2.24) des composantes cartésiennes d'un opérateur vectoriel

$$V'_i = P_{R(\alpha,\beta,\gamma)}\, V_i\, P^{+}_{R(\alpha,\beta,\gamma)} = \sum_j a^{-1}_{ij}(\alpha,\beta,\gamma)\, V_j \qquad i = 1,2,3\,, \tag{1.13}$$

induit la loi de transformation

$$V'_q = P_{R(\alpha,\beta,\gamma)}\, V_q\, P^{+}_{R(\alpha,\beta,\gamma)} = \sum_{q'} \mathcal{D}^{1}_{q'q}(\alpha,\beta,\gamma)\, V_{q'} \qquad q = +1, 0, -1, \tag{1.14}$$

pour ses composantes sphériques. En vertu de la relation (IV 6.11) et de son inverse, on a

$$V'_q = \sum_{q'} \left(u\, a^{-1}(\alpha,\beta,\gamma)\, u^+ \right)_{qq'} V_{q'} \quad , \tag{1.15}$$

où u est la matrice (IV 6.12) qui transforme les composantes cartésiennes d'un vecteur en ses composantes sphériques. Par conséquent

$$V'_q = \sum_{q'} \left[\mathcal{D}^{1*-1}(\alpha,\beta,\gamma) \right]_{qq'} V_{q'}$$

$$= \sum_{q'} \tilde{\mathcal{D}}^1_{qq'}(\alpha,\beta,\gamma)\, V_{q'} \quad , \tag{1.16}$$

en utilisant la relation (IV 6.18) et la propriété d'unitarité de la matrice $\mathcal{D}^1$. La relation (1.16) coïncide avec (1.14).

2. Addition, multiplication et contraction d'opérateurs tensoriels irréductibles

L'algèbre des tenseurs sphériques présente certaines analogies avec celle des tenseurs cartésiens. Rappelons que pour des tenseurs cartésiens, la somme de deux tenseurs de rang donné est un tenseur de même rang. Par exemple, pour des tenseurs de rang 3

$$T_{ijk} + U_{ijk} = V_{ijk} \; . \tag{2.1}$$

Le produit de deux tenseurs est un tenseur dont le rang est la somme des rangs des facteurs. Par exemple, le produit de deux tenseurs de rang 3 est un tenseur de rang 6 :

$$W_{ijklmn} = T_{ijk}\, U_{lmn} \; . \tag{2.2}$$

Enfin, le rang d'un tenseur peut être réduit d'un nombre pair par le procédé de contraction qui consiste à égaler des couples d'indices et à sommer sur les indices répétés. Par exemple, un tenseur de rang 3 peut être contracté en un tenseur de rang 1, dont les composantes sont

$$\sum_j T_{ijj} \quad \text{ou} \quad \sum_j T_{jij} \quad \text{ou} \quad \sum_j T_{jji} \; . \tag{2.3}$$

Etudions maintenant ce que deviennent ces opérations pour les tenseurs sphériques. Soient $T^{k_1}_{q_1}$ (1) et $T^{k_2}_{q_2}$ (2) deux opérateurs tensoriels irréductibles de rang k_1 et k_2 respectivement. Les symboles 1 et 2 désignent toutes les variables dont dépendent les tenseurs *. Pour des harmoniques sphériques par exemple, ils représentent les coordonnées angulaires de deux points sur la sphère unité, θ_1, φ_1 et θ_2, φ_2. L'addition des tenseurs sphériques est la même que pour les tenseurs cartésiens: la somme de deux tenseurs de rang k, T^k_q (1) et T^k_q (2) est un autre tenseur de rang k, T^k_q (1) + T^k_q (2). Ceci est une conséquence directe du caractère linéaire de la transformation (1.9).

La multiplication et la contraction, cependant, sont un peu différentes pour les tenseurs sphériques. La règle de multiplication est la suivante : à partir de deux opérateurs tensoriels irréductibles de rang k_1 et k_2, on peut construire un opérateur tensoriel irréductible de rang k pourvu que les inégalités triangulaires $\delta(k_1 k_2 k)$ soient satisfaites et que les nombres quantiques magnétiques s'ajoutent algébriquement. Elle s'exprime par la relation

$$T^k_q(1,2) = \sum_{q_1} \langle k_1 q_1 \; k_2 \; q-q_1 | k q \rangle \, T^{k_1}_{q_1}(1) \; T^{k_2}_{q-q_1}(2). \tag{2.4}$$

En multipliant des tenseurs sphériques, les rangs s'additionnent donc vectoriellement plutôt qu'algébriquement, comme ils le font pour les tenseurs cartésiens. On utilise souvent pour le produit tensoriel (2.4) la notation abrégée

$$T^k_q(1,2) = \left[T^{k_1}(1) \times T^{k_2}(2) \right]^k_q . \tag{2.5}$$

Démontrons maintenant que l'opérateur défini par (2.4) est effectivement la composante q d'un opérateur tensoriel irréductible de rang k si $T^{k_1}_{q_1}$ et $T^{k_2}_{q_2}$ sont les composantes d'opérateurs tensoriels irréductibles de rang k_1 et k_2 respectivement. Il faut donc montrer que l'opérateur défini par (2.4) satisfait à la relation (1.9).

---

* Les variables 1 et 2 peuvent être identiques.

La rotation R (α ,β ,γ) du système de coordonnées transforme la relation (2.4) en

$$\mathcal{P}_R\, T^k_q(1,2)\, \mathcal{P}_R^+ = \sum_{q_1} \langle k_1 q_1\, k_2\, q-q_1 | kq \rangle \left(\mathcal{P}_R\, T^{k_1}_{q_1}(1)\, \mathcal{P}_R^+\right)\left(\mathcal{P}_R\, T^{k_2}_{q_2}(2)\, \mathcal{P}_R^+\right) \qquad (2.6)$$

ou, en appliquant la relation (1.9) au membre de droite,

$$\mathcal{P}_R\, T^k_q(1,2)\, \mathcal{P}_R^+ = \sum_{q_1' q_2'} T^{k_1}_{q_1'}(1)\, T^{k_2}_{q_2'}(2) \sum_{q_1} \langle k_1 q_1\;\, k_2\, q-q_1 | kq \rangle$$
$$\mathcal{D}^{k_1}_{q_1' q_1}\;\, \mathcal{D}^{k_2}_{q_2', q-q_1} . \qquad (2.7)$$

Remplaçons les deux fonctions $\mathcal{D}$ par la série de Clebsch-Gordan (IV 8.5). On obtient :

$$\mathcal{P}_R\, T^k_q(1,2)\, \mathcal{P}_R^+$$
$$= \sum_{q_1' q_2'} T^{k_1}_{q_1'}(1)\, T^{k_2}_{q_2'}(2) \sum_{q_1} \langle k_1 q_1\, k_2\, q-q_1 | kq \rangle$$
$$\times \sum_{k'} \langle k_1 q_1'\, k_2\, q_2' | k'\, q_1'+q_2' \rangle \langle k_1 q_1\, k_2\, q-q_1 | k' q \rangle\;\, \mathcal{D}^{k'}_{q_1'+q_2', q}$$
$$= \sum_{q_1' q_2'} T^{k_1}_{q_1'}(1)\, T^{k_2}_{q_2'}(2) \sum_{k'} \langle k_1 q_1'\, k_2 q_2' | k' q_1'+q_2' \rangle\;\, \mathcal{D}^{k'}_{q_1'+q_2', q}$$
$$\times \sum_{q_1} \langle k_1 q_1\, k_2\, q-q_1 | k q \rangle \langle k_1 q_1\, k_2\, q-q_1 | k' q \rangle . \qquad (2.8)$$

La somme sur q_1 donne $\delta_{kk'}$, en vertu de la propriété d'orthogonalité (II 2.8) des coefficients de Clebsch-Gordan. Par conséquent

$$\mathcal{P}_R\, T^k_q(1,2)\, \mathcal{P}_R^+ = \sum_{q_1' q_2'} \mathcal{D}^k_{q_1'+q_2', q}\;\, \langle k_1 q_1'\, k_2 q_2' | k\, q_1'+q_2' \rangle\, T^{k_1}_{q_1'}(1)\, T^{k_2}_{q_2'}(2) . \qquad (2.9)$$

En posant $q' = q_1' + q_2'$, on élimine q_2' de telle sorte que

$$P_R\, T^k_q(1,2)\, P_R^+ = \sum_{q'} \mathcal{D}^k_{q'q} \sum_{q'_1} \langle k_1 q'_1\, k_2\, q'-q'_1 | k q' \rangle\, T^{k_1}_{q'_1}(1)\, T^{k_2}_{q'-q'_1}(2)$$

$$= \sum_{q'} \mathcal{D}^k_{q'q}\, T^k_{q'}(1,2) \qquad (2.10)$$

en utilisant la définition (2.4). L'expression (2.4) satisfait donc la relation de définition (1.9) d'un opérateur tensoriel irréductible de rang k, ce qui termine la démonstration.

Comme exemple de produit tensoriel, considérons le cas où les variables 1 et 2 sont les coordonnées angulaires d'un même point sur la sphère unité et les opérateurs tensoriels irréductibles sont des harmoniques sphériques. La relation (2.4) s'écrit alors

$$T^k_q(\theta,\varphi) = \sum_{q_1} \langle k_1\, q_1\, k_2\, q-q_1 | k q \rangle\, Y_{k_1 q_1}(\theta,\varphi)\, Y_{k_2, q-q_1}(\theta,\varphi). \qquad (2.11)$$

La forme explicite de l'opérateur produit $T^k_q(\theta,\varphi)$ est facile à déterminer. C'est en effet une fonction définie sur la sphère unité qui possède les propriétés d'un tenseur de rang k. Or les harmoniques sphériques constituent un système complet de fonctions définies sur la sphère unité et possèdent un caractère tensoriel bien défini. Dès lors $T^k_q(\theta,\varphi)$ doit être proportionnel à $Y_{kq}(\theta,\varphi)$, la constante de proportionnalité étant indépendante de q :

$$T^k_q(\theta,\varphi) = C(k_1, k_2, k)\, Y_{kq}(\theta,\varphi). \qquad (2.12)$$

On obtient la valeur de la constante de proportionnalité en multipliant la relation (2.11) par $Y^*_{kq}(\theta,\varphi)$, en intégrant par rapport à θ et φ et en tenant compte des relations (I 3.48) et (IV 10.19) :

$$C(k_1,k_2,k) = \left[\frac{(2k_1+1)(2k_2+1)}{4\pi\,(2k+1)}\right]^{\frac{1}{2}} \langle k_1 0\, k_2 0 | k 0\rangle \sum_{q_1} \langle k_1 q_1\, k_2\, q-q_1 | k q\rangle^2$$

$$= \left[\frac{(2k_1+1)(2k_2+1)}{4\pi\,(2k+1)}\right]^{\frac{1}{2}} \langle k_1 0\, k_2 0 | k 0\rangle. \qquad (2.13)$$

On a donc établi que

$$\sum_{q_1} \langle k_1 q_1 \; k_2 \; q-q_1 | k q \rangle \; Y_{k_1 q_1}(\theta,\varphi) \, Y_{k_2 \, q-q_1}(\theta,\varphi)$$

$$= \left[\frac{(2k_1+1)(2k_2+1)}{4\pi\,(2k+1)} \right]^{\frac{1}{2}} \langle k_1 0 \; k_2 0 | k 0 \rangle \; Y_{kq}(\theta,\varphi). \qquad (2.14)$$

L'inverse de la relation (2.4) permet de développer le produit ordinaire d'opérateurs tensoriels irréductibles en une somme d'opérateurs tensoriels irréductibles :

$$T^{k_1}_{q_1}(1) \, T^{k_2}_{q_2}(2) = \sum_k \langle k_1 q_1 \; k_2 q_2 | k \; q_1+q_2 \rangle \; T^{k}_{q_1+q_2}(1,2)$$

$$= \sum_q \langle k_1 q_1 \; k_2 q_2 | k \; q_1+q_2 \rangle \left[T^{k_1}(1) \times T^{k_2}(2) \right]^{k}_{q_1+q_2} . \qquad (2.15)$$

Par exemple, pour un produit d'harmoniques sphériques calculées au même point, on a :

$$Y_{k_1 q_1}(\theta,\varphi) \, Y_{k_2 q_2}(\theta,\varphi) = \sum_k \left[\frac{(2k_1+1)(2k_2+1)}{4\pi\,(2k+1)} \right]^{\frac{1}{2}} \langle k_1 0 \; k_2 0 | k 0 \rangle$$

$$\times \langle k_1 q_1 \; k_2 q_2 | k \; q_1+q_2 \rangle \; Y_{k,\, q_1+q_2}(\theta,\varphi). \qquad (2.16)$$

Dans le produit tensoriel (2.4),le rang du tenseur résultant peut varier par pas de 1 entre les limites $k = k_1 - k_2$ et $k = k_1 + k_2$. Si $k_1 = k_2$, il est possible de construire un invariant, c'est-à-dire un tenseur de rang nul :

$$T^{0}_{0}(1,2) = \sum_{q_1} \langle k_1 q_1 \; k_1 \, -q_1 | 0 0 \rangle \; T^{k_1}_{q_1}(1) \, T^{k_1}_{-q_1}(2)$$

$$= \sum_{q_1} \frac{(-1)^{k_1 - q_1}}{\sqrt{2k_1+1}} \; T^{k_1}_{q_1}(1) \, T^{k_1}_{-q_1}(2), \qquad (2.17)$$

en tenant compte de la valeur explicite du coefficient de Clebsch-Gordan. Dans (2.17), le facteur $(-1)^{k_1}$ $(2k_1+1)^{-\frac{1}{2}}$ peut être sorti de la sommation et absorbé dans T_0^o (1, 2). On obtient alors un invariant proportionnel à (2.17), qui est par définition le produit scalaire * des tenseurs T^{k_1} (1) et T^{k_1} (2) :

$$T^{k_1}(1) \cdot T^{k_1}(2) = \sum_{q_1} (-1)^{q_1} \, T^{k_1}_{q_1}(1) \, T^{k_1}_{-q_1}(2) . \tag{2.18}$$

Cet invariant a été obtenu en contractant deux tenseurs de même rang d'après la loi de multiplication (2.4). Pour $k_1 = 1$, le produit scalaire de tenseurs se réduit au produit scalaire ordinaire de vecteurs.

Un exemple d'application du processus de contraction (2.18) est fourni par le théorème d'addition des harmoniques sphériques (IV 9.9). En effet, en tenant compte de la propriété (I 3. 49) des harmoniques sphériques, ce théorème se récrit

$$\sum_m Y^*_{\ell m}(\theta_1,\varphi_1) \, Y_{\ell m}(\theta_2,\varphi_2) = \sum_m (-1)^m \, Y_{\ell -m}(\theta_1,\varphi_1) \, Y_{\ell m}(\theta_2,\varphi_2)$$
$$= \frac{2\ell+1}{4\pi} \, P_\ell(\cos\theta_{12}) . \tag{2.19}$$

Il exprime le fait que le produit scalaire des deux opérateurs tensoriels irréductibles de rang ℓ , $Y_{\ell m}(\theta_1,\varphi_1)$ et $Y_{\ell m}(\theta_2,\varphi_2)$, est un invariant dont la valeur est égale à $\frac{2\ell+1}{4\pi} P_\ell(\cos\theta_{12})$, où θ_{12} représente l'angle que font entre elles les directions d'angles polaires (θ_1,φ_1) et (θ_2,φ_2) .

---

* On n'utilise la notion de produit scalaire que pour des opérateurs tensoriels de rang entier, pour lesquels la phase $(-1)^{q_1}$ est réelle. Pour les opérateurs de rang demi-entier, il est plus commode de continuer à travailler avec le produit tensoriel de rang nul, dans lequel la phase $(-1)^{k_1-q_1}$ est réelle.

3. Définition de Racah des opérateurs tensoriels irréductibles

Dans le paragraphe 1, nous avons défini les opérateurs tensoriels irréductibles par leurs propriétés de transformation par rotation. Racah a donné une autre définition au moyen des relations de commutation des composantes tensorielles avec les opérateurs de moment cinétique : l'ensemble des 2k+1 opérateurs T^k_q ($q = -k, -k+1, \ldots k$) constitue un opérateur tensoriel irréductible si les relations de commutation

$$[J_\pm , T^k_q] = [(k \mp q)(k \pm q+1)]^{\frac{1}{2}} \; T^k_{q\pm 1} , \tag{3.1a}$$

$$[J_0 , T^k_q] = q \, T^k_q \tag{3.1b}$$

sont satisfaites. Nous allons montrer maintenant que cette définition est équivalente à celle contenue dans la relation (1.9).

Récrivons la relation (1.9) pour une rotation infinitésimale d'angle $d\Phi$ autour de $\bar{n}$:

$$e^{i d\Phi\, \bar{n}.\bar{J}} \; T^k_q \; e^{-i d\Phi\, \bar{n}.\bar{J}} = \sum_{q'} T^k_{q'} \langle kq' | e^{i d\Phi\, \bar{n}.\bar{J}} | kq \rangle , \tag{3.2}$$

ou en se limitant aux termes du premier ordre en $d\Phi$

$$(1 + i d\Phi\, \bar{n}.\bar{J})\, T^k_q \,(1 - i d\Phi\, \bar{n}.\bar{J}) = \sum_{q'} T^k_{q'} \langle kq' | (1 + i d\Phi\, \bar{n}.\bar{J}) | kq \rangle . \tag{3.3}$$

Il en résulte que

$$[\bar{n}.\bar{J} , T^k_q] = \sum_{q'} T^k_{q'} \langle kq' | \bar{n}.\bar{J} | kq \rangle . \tag{3.4}$$

Prenons successivement $\bar{n} = \bar{e}_1$, $\bar{e}_2$ et $\bar{e}_3$ et utilisons la valeur explicite des éléments de matrice de $\bar{n}.\bar{J}$, contenue dans les relations (I 8.32), (I 8.33) et (I 8.29). On trouve :

$$[J_1 , T^k_q] = \frac{1}{2}[(k-q)(k+q+1)]^{\frac{1}{2}} \, T^k_{q+1} + \frac{1}{2}[(k+q)(k-q+1)]^{\frac{1}{2}} \, T^k_{q-1} , \tag{3.5a}$$

$$\left[J_2, T^k_q\right] = -\frac{i}{2}\left[(k-q)(k+q+1)\right]^{\frac{1}{2}} T^k_{q+1} + \frac{i}{2}\left[(k+q)(k-q+1)\right]^{\frac{1}{2}} T^k_{q-1} , \tag{3.5b}$$

$$\left[J_3, T^k_q\right] = q\, T^k_q . \tag{3.5c}$$

En se servant des relations (3.5a) et (3.5b), on trouve pour les combinaisons $J_1 \pm i\, J_2$ le résultat contenu dans la relation (3.1a). On a donc montré que la définition des opérateurs tensoriels irréductibles par leurs propriétés de transformation par rotation implique les relations de commutation avec les opérateurs de moment cinétique données dans (3.1). La propriété inverse suivant laquelle les relations de commutation (3.1) imposent les propriétés de transformation (1.9) est liée au fait que les relations de commutation (3.1) expriment la validité des propriétés de transformation (1.9) pour des rotations infinitésimales et à la possibilité d'engendrer toute rotation finie au moyen d'une succession de rotations infinitésimales.

Un exemple de relations de commutation (3.1) est fourni par les opérateurs de moment cinétique total eux-mêmes. Dans la base sphérique, les trois composantes J_q (q = +1, o, -1) du moment cinétique sont

$$\begin{aligned} J_{+1} &= -\frac{1}{\sqrt{2}}\left(J_1 + i\, J_2\right) = -\frac{1}{\sqrt{2}}\, J_+ , \\ J_0 &= J_3 , \\ J_{-1} &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(J_1 - i\, J_2\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}\, J_- . \end{aligned} \tag{3.6}$$

Les relations de commutation (I 8.1) se récrivent sous la forme

$$\begin{array}{lll} \left[J_+, J_{+1}\right] = 0 , & \left[J_0, J_{+1}\right] = J_{+1} , & \left[J_-, J_{+1}\right] = \sqrt{2}\, J_0 , \\ \left[J_+, J_0\right] = \sqrt{2}\, J_{+1} , & \left[J_0, J_0\right] = 0 , & \left[J_-, J_0\right] = \sqrt{2}\, J_{-1} , \\ \left[J_+, J_{-1}\right] = \sqrt{2}\, J_0 , & \left[J_0, J_{-1}\right] = -J_{-1} , & \left[J_-, J_{-1}\right] = 0 . \end{array} \tag{3.7}$$

Ce sont les relations de commutation (3.1) pour un opérateur tensoriel irréductible de rang 1. Lorsqu'on contracte l'opérateur J_q avec lui-même, on obtient le scalaire

$$\bar{J}^2 = \sum_q (-1)^q \, J_q \, J_{-q} \, , \tag{3.8}$$

qui satisfait les relations de commutation

$$\left[J_\pm \, , \, \bar{J}^2 \right] = \left[J_0 \, , \, \bar{J}^2 \right] = 0 \tag{3.9}$$

d'un opérateur tensoriel irréductible de rang nul.

Il est utile d'écrire les relations de commutation (3.1) complètement dans la base sphérique. En multipliant (3.1a) par $\mp 1/\sqrt{2}$, on obtient

$$\left[J_{\pm 1} \, , \, T^k_q \right] = \mp \left[\tfrac{1}{2} \, (k \mp q)(k \pm q + 1) \right]^{\frac{1}{2}} \, T^k_{q \pm 1} \, , \tag{3.10a}$$

$$\left[J_0 \, , \, T^k_q \right] = q \, T^k_q \, . \tag{3.10b}$$

Le premier membre de ces relations contient le produit ordinaire des composantes de deux opérateurs tensoriels irréductibles de rang 1 et k respectivement. En vertu de la relation (2.15), le coefficient qui apparaît dans le deuxième membre doit être proportionnel au coefficient de Clebsch-Gordan qui effectue le couplage des moments cinétiques 1 et k pour former le moment cinétique k. En consultant une table de coefficients de Clebsch-Gordan ou en appliquant la formule générale (II 5.20), on trouve que

$$\langle k q \, 1 \mu | k \; q+\mu \rangle = \frac{1}{\sqrt{k(k+1)}} \times \begin{cases} - \left[\tfrac{1}{2} \, (k-q)(k+q+1) \right]^{\frac{1}{2}} & \mu = 1 \\ q & \mu = 0 \\ \left[\tfrac{1}{2} \, (k+q)(k-q+1) \right]^{\frac{1}{2}} & \mu = -1 \end{cases} \; . \tag{3.11}$$

Par conséquent, les relations (3.10) peuvent se récrire sous la forme

$$\left[J_\mu \, , \, T^k_q \right] = \langle k q \, 1 \mu | k \; q+\mu \rangle \sqrt{k(k+1)} \; T^k_{q+\mu} \qquad \mu = +1, 0, -1. \tag{3.12}$$

De la même manière, on peut récrire les éléments de matrice des opérateurs de moment cinétique, donnés dans les relations (I 8.28) et (I 8.29), sous la forme

$$\langle j'm' | j_\mu | jm \rangle = \delta_{j'j} \, \delta_{m', m+\mu} \sqrt{j(j+1)} \, \langle j m 1 \mu | j \, m+\mu \rangle . \tag{3.13}$$

4. Théorème de Wigner-Eckart

Ayant établi dans le paragraphe précédent les relations de commutation des composantes d'un opérateur tensoriel irréductible avec les opérateurs de moment cinétique, nous allons maintenant examiner les propriétés des éléments de matrice de ces composantes tensorielles entre des états propres du moment cinétique.

Suivant le théorème de Wigner-Eckart, que nous allons démontrer, la dépendance de l'élément de matrice $\langle \gamma' J' M' | T^k_q | \gamma J M \rangle$ en les nombres quantiques magnétiques M', q et M est entièrement contenue dans le coefficient de Clebsch-Gordan $\langle J M k q | J' M' \rangle$:

$$\langle \gamma' J' M' | T^k_q | \gamma J M \rangle = \langle J M k q | J' M' \rangle \, \langle \gamma' J' \| T^k \| \gamma J \rangle . \tag{4.1}$$

La quantité $\langle \gamma' J' \| T^k \| \gamma J \rangle$ est appelée l'élément de matrice réduit de l'opérateur tensoriel irréductible T^k. Comme l'indique la notation, elle est indépendante de M', q et M. La présence du coefficient de Clebsch-Gordan dans (4.1) indique que l'élément de matrice $\langle \gamma' J' M' | T^k_q | \gamma J M \rangle$ s'annule sauf si

$$\delta(J\,k\,J') \qquad \text{et} \qquad M' = M + q . \tag{4.2}$$

La démonstration du théorème de Wigner-Eckart est basée sur les relations de commutation des composantes T^k_q avec les opérateurs de moment cinétique. Les éléments de matrice de la relation (3.1b) sont

$$\langle \gamma' J' M' | J_0 T^k_q | \gamma J M \rangle - \langle \gamma' J' M' | T^k_q J_0 | \gamma J M \rangle = q \langle \gamma' J' M' | T^k_q | \gamma J M \rangle . \tag{4.3}$$

Faisons opérer J_0 à gauche dans le premier élément de matrice et à droite dans le second. On obtient :

$$(M'-M-q)\ \langle \gamma' J' M' | T_q^k | \gamma J M \rangle = 0 \quad , \tag{4.4}$$

d'où il résulte que

$$\langle \gamma' J' M' | T_q^k | \gamma J M \rangle = 0 \qquad \text{sauf si} \quad M' = M+q \,. \tag{4.5}$$

C'est la règle de conservation des nombres quantiques magnétiques.

Les éléments de matrice du commutateur (3.1a) sont

$$\langle \gamma' J' M' | J_\pm T_q^k | \gamma J M \rangle - \langle \gamma' J' M' | T_q^k J_\pm | \gamma J M \rangle$$
$$= \left[(k \mp q)(k \pm q + 1) \right]^{\frac{1}{2}} \langle \gamma' J' M' | T_{q\pm 1}^k | \gamma J M \rangle \,. \tag{4.6}$$

Faisons opérer $J_\pm$ à gauche dans le premier élément de matrice (où il a le même effet que $J_\pm^+ = J_\mp$ sur $|\gamma' J' M'\rangle$) et à droite dans le second. On a en vertu de la relation (I 8.28) :

$$\left[(J' \pm M')(J' \mp M' + 1) \right]^{\frac{1}{2}} \langle \gamma' J' M' \mp 1 | T_q^k | \gamma J M \rangle$$
$$- \left[(J \mp M)(J \pm M + 1) \right]^{\frac{1}{2}} \langle \gamma' J' M' | T_q^k | \gamma J M \pm 1 \rangle$$
$$= \left[(k \mp q)(k \pm q + 1) \right]^{\frac{1}{2}} \langle \gamma' J' M' | T_{q\pm 1}^k | \gamma J M \rangle \,. \tag{4.7}$$

La comparaison des relations (4.7) et (II 3.4), (II 3.5) montre que l'élément de matrice $\langle \gamma' J' M' | T_q^k | \gamma J M \rangle$ satisfait aux mêmes relations de récurrence que le coefficient de Clebsch-Gordan $\langle J\, M\, k\, q \mid J'\, M' \rangle$. Dès lors la dépendance de ces deux quantités en les nombres quantiques M', q , M doit être la même, ce qui démontre la relation de proportionnalité (4.1).

Le théorème de Wigner-Eckart est très important pour diverses raisons. En premier lieu, il permet une séparation des caractéristiques d'un processus physique qui dépendent de la géométrie et des propriétés de symétrie du système, qui sont contenues dans le coefficient de Clebsch-Gordan, de celles qui dépendent de la description physique détaillée du système (apparaissant par l'intermédiaire des nombres quantiques γ et γ'), qui sont contenues dans l'élément de matrice réduit. En second lieu, le théorème constitue une expression formelle des lois de conservation du moment cinétique (4.2), dans la mesure où ces lois sont entièrement contenues dans le coefficient de Clebsch-Gordan. Quand T^k_q représente un opérateur de transition qui fait passer d'un état initial $|\gamma J M\rangle$ à un état final $|\gamma' J' M'\rangle$ par absorption d'une radiation, les lois (4.2) expriment simplement le fait que la somme (vectorielle) des moments cinétiques de l'état initial et de la radiation est égale au moment cinétique de l'état final. Finalement d'un point de vue pratique, le théorème de Wigner-Eckart permet de calculer tous les éléments de matrice d'un opérateur tensoriel irréductible à partir de l'un quelconque d'entre eux. On a en effet d'après (4.1)

$$\langle \gamma' J' M' | T^k_q | \gamma J M \rangle = \frac{\langle J M k q | J' M' \rangle}{\langle J \bar{M} k \bar{q} | J' \bar{M}' \rangle} \langle \gamma' J' \bar{M}' | T^k_{\bar{q}} | \gamma J \bar{M} \rangle , \qquad (4.8)$$

pourvu que $\langle J \bar{M} k \bar{q} | J' \bar{M}' \rangle \neq 0$.

Comme exemple, considérons les éléments de matrice d'une harmonique sphérique entre des états propres du moment cinétique orbital. D'après la relation (IV 10.19) :

$$\langle \ell' m' | Y_{kq}(\theta,\varphi) | \ell m \rangle = \int_0^{\pi} d\theta \sin\theta \int_0^{2\pi} d\varphi \; Y^*_{\ell' m'}(\theta,\varphi)\, Y_{kq}(\theta,\varphi)\, Y_{\ell m}(\theta,\varphi)$$

$$= \langle \ell m \, k q | \ell' m' \rangle \langle \ell o \, k o | \ell' o \rangle \left[\frac{(2\ell+1)(2k+1)}{4\pi (2\ell'+1)} \right]^{\frac{1}{2}} . \qquad (4.9)$$

Le théorème de Wigner-Eckart indique que les éléments de matrice réduits des harmoniques sphériques sont donnés par

$$\langle \ell' \| Y_k \| \ell \rangle = \langle \ell o \, k o | \ell' o \rangle \left[\frac{(2\ell+1)(2k+1)}{4\pi (2\ell'+1)} \right]^{\frac{1}{2}} . \qquad (4.10)$$

Comme autre exemple, considérons les éléments de matrice des opérateurs de moment cinétique donnés dans la relation (3.13) :

$$\langle j'm' | j_\mu | jm \rangle = \langle jm\, 1\mu | j'm' \rangle \sqrt{j(j+1)}\ \delta_{jj'} \,. \tag{4.11}$$

L'élément de matrice réduit du moment cinétique est donc

$$\langle j' \| j \| j \rangle = \sqrt{j(j+1)}\ \delta_{jj'} \,. \tag{4.12}$$

On trouve en particulier pour le moment cinétique orbital

$$\langle \ell' \| \ell \| \ell \rangle = \sqrt{\ell(\ell+1)}\ \delta_{\ell\ell'} \tag{4.13}$$

et pour le moment cinétique de spin

$$\langle \tfrac{1}{2} \| s \| \tfrac{1}{2} \rangle = \tfrac{1}{2} \langle \tfrac{1}{2} \| \sigma \| \tfrac{1}{2} \rangle = \frac{\sqrt{3}}{2} \,. \tag{4.14}$$

5. Adjoint hermitique d'un opérateur tensoriel irréductible

Prenons l'adjoint hermitique des relations de commutation (3.1) des composantes d'un opérateur tensoriel irréductible avec les opérateurs de moment cinétique. En tenant compte des propriétés $J_\pm^+ = J_\mp$ et $J_o^+ = J_o$, on trouve

$$\left[J_\pm , T^k_q \right]^+ = - \left[J_\mp , T^{k+}_q \right] = \left[(k \mp q)(k \pm q + 1) \right]^{\frac{1}{2}}\ T^{k\ +}_{q\pm 1} \,, \tag{5.1a}$$

$$\left[J_o , T^k_q \right]^+ = - \left[J_o , T^{k+}_q \right] = q\ T^{k+}_q \,. \tag{5.1b}$$

Ces relations se récrivent en changeant le signe de q sous la forme

$$\left[J_\pm , T^{k+}_{-q} \right] = - \left[(k \mp q)(k \pm q + 1) \right]^{\frac{1}{2}}\ T^{k\ +}_{-(q\pm 1)} \,, \tag{5.2a}$$

$$\left[J_o , T^{k+}_{-q} \right] = q\ T^{k+}_{-q} \,. \tag{5.2b}$$

La présence du signe moins dans la relation (5.2a) empêche T^{k+}_{-q} d'être la composante d'un opérateur tensoriel irréductible. Ce problème est facilement surmonté en introduisant dans l'opérateur une phase $(-1)^q$. L'opérateur de composantes $\varphi(k)\,(-1)^q\, T^{k\,+}_{-q}$, où $\varphi(k)$ est une phase arbitraire dépendant seulement de k, satisfait les mêmes relations de commutation avec les opérateurs de moment cinétique que l'opérateur de composantes T^k_q : $\varphi(k)\,(-1)^q\, T^{k\,+}_{-q}$ est donc la composante q d'un opérateur tensoriel irréductible de rang k que l'on appelle l'adjoint hermitique T^+ de l'opérateur T. Le choix de la phase $\varphi(k)$ varie suivant les auteurs . Nous prendrons

$$T^{+\,k}_{\;q} \equiv (-1)^{k-q}\, T^{k\,+}_{-q} \,, \tag{5.3}$$

définition qui a l'avantage d'avoir un sens bien défini pour les rangs demi-entiers aussi bien que pour les rangs entiers.

Un opérateur tensoriel irréductible auto-adjoint est défini par la propriété

$$T^{+\,k}_{\;q} = T^k_q = (-1)^{k-q}\, T^{k\,+}_{-q} \,. \tag{5.4}$$

Le produit tensoriel de deux opérateurs auto-adjoints qui commutent est lui-même auto-adjoint. Pour le prouver, il faut montrer que si

$$T^{k_1}_{q_1}(1) = (-1)^{k_1-q_1}\, T^{k_1}_{-q_1}(1)^+ \,, \quad T^{k_2}_{q_2}(2) = (-1)^{k_2-q_2}\, T^{k_2}_{-q_2}(2)^+ \tag{5.5}$$

et $$\left[T^{k_1}_{q_1}(1) \,,\, T^{k_2}_{q_2}(2) \right] = 0 \,, \tag{5.6}$$

alors $$\left[T^{k_1}(1) \times T^{k_2}(2) \right]^k_q = (-1)^{k-q} \left[T^{k_1}(1) \times T^{k_2}(2) \right]^{k\,+}_{-q} . \tag{5.7}$$

Développons le second membre de la relation (5.7). On a :

$$(-1)^{k-q} \left[T^{k_1}(1) \times T^{k_2}(2) \right]^{k\,+}_{-q}$$

$$= (-1)^{k-q} \sum_{q_1} \langle k_1 -q_1\, k_2\, -q+q_1 | k -q \rangle \left[T^{k_1}_{-q_1}(1)\, T^{k_2}_{-q+q_1}(2) \right]^+ \qquad \text{en vertu de (2.4)}$$

$$= (-1)^{k-q} \sum_{q_1} \langle k_1 \, -q_1 \, k_2 \, -q+q_1 | k \, -q \rangle \, T^{k_1}_{-q_1}(1)^{+} \, T^{k_2}_{-q+q_1}(2)^{+} \quad \text{en vertu de (5.6)}$$

$$= (-1)^{k-q} \sum_{q_1} (-1)^{k_1+k_2-k} \langle k_1 \, q_1 \, k_2 \, q-q_1 | k \, q \rangle \, (-1)^{k_1-q_1} \, T^{k_1}_{q_1}(1)$$

$$(-1)^{k_2-q+q_1} \, T^{k_2}_{q-q_1}(2) \qquad \text{en vertu de (II 4.28) et (5.5)}$$

$$= (-1)^{2k_1+2k_2-2q} \left[T^{k_1}(1) \times T^{k_2}(2) \right]^k_q$$

$$= \left[T^{k_1}(1) \times T^{k_2}(2) \right]^k_q ,$$

ce qui démontre la relation (5.7).

Ecrivons le théorème de Wigner-Eckart pour l'adjoint d'un opérateur tensoriel irréductible :

$$\langle \gamma' J' M' | T^{+k}_{q} | \gamma J M \rangle = \langle J M k q | J' M' \rangle \langle \gamma' J' \| T^k \| \gamma J \rangle . \qquad (5.8)$$

Mais d'autre part

$$\langle \gamma' J' M' | T^{+k}_{q} | \gamma J M \rangle = (-1)^{k-q} \langle \gamma' J' M' | T^{k}_{-q}{}^{+} | \gamma J M \rangle$$

$$= (-1)^{k-q} \langle \gamma J M | T^{k}_{-q} | \gamma' J' M' \rangle^{*} . \qquad (5.9)$$

En appliquant le théorème de Wigner-Eckart au second membre de la relation (5.9), on obtient

$$\langle \gamma' J' M' | T^{+k}_{q} | \gamma J M \rangle = (-1)^{k-q} \langle J' M' \, k \, -q | J M \rangle \langle \gamma J \| T^k \| \gamma' J' \rangle^{*}$$

$$= (-1)^{J+k-J'} \sqrt{\frac{2J+1}{2J'+1}} \, \langle J M k q | J' M' \rangle \langle \gamma J \| T^k \| \gamma' J' \rangle^{*} , \qquad (5.10)$$

où l'on a tenu compte du caractère réel des coefficients de Clebsch-Gordan et de leurs propriétés de symétrie (II 4.13) et (II 4.26). La comparaison de (5.8) et (5.10) montre que les éléments de matrice réduits d'un opérateur tensoriel irréductible et de son adjoint sont liés par la relation

$$\langle \gamma' J' \| T^{+k} \| \gamma J \rangle = (-1)^{J+k-J'} \sqrt{\frac{2J+1}{2J'+1}} \; \langle \gamma J \| T^{k} \| \gamma' J' \rangle^{*} . \tag{5.11}$$

En particulier, les éléments de matrice réduits d'un opérateur auto-adjoint possèdent la propriété de symétrie

$$\langle \gamma' J' \| T^{k} \| \gamma J \rangle = (-1)^{J+k-J'} \sqrt{\frac{2J+1}{2J'+1}} \; \langle \gamma J \| T^{k} \| \gamma' J' \rangle^{*} . \tag{5.12}$$

Prenons comme exemple les harmoniques sphériques

$$T^{k}_{q} = Y_{kq} \, (\theta, \varphi) . \tag{5.13}$$

Leur adjoint hermitique est d'après la relation (5.3)

$$T^{+k}_{q} = (-1)^{k-q} \; Y^{*}_{k-q} \; (\theta, \varphi) . \tag{5.14}$$

La propriété (I 3.49), suivant laquelle

$$Y^{*}_{kq} \, (\theta, \varphi) = (-1)^{q} \; Y_{k-q} \, (\theta, \varphi) , \tag{5.15}$$

entraîne que

$$T^{+k}_{q} = (-1)^{k} \; Y_{kq} \, (\theta, \varphi) = (-1)^{k} \; T^{k}_{q} . \tag{5.16}$$

Par conséquent lorsqu'on adopte la définition (5.3) pour l'adjoint d'un opérateur tensoriel irréductible , l'adjoint d'une harmonique sphérique Y_{kq} diffère de celle-ci par la phase $(-1)^{k}$.

6. Eléments de matrice du produit tensoriel de deux opérateurs tensoriels irréductibles

6.1. Opérateurs tensoriels agissant sur le même système

Soient T^{k_1} et T^{k_2} deux opérateurs tensoriels irréductibles dépendant des mêmes variables (que nous n'écrirons pas). Le théorème de Wigner-Eckart (4.1) appliqué à leur produit tensoriel donne

$$\langle \gamma' J' M' | \left[T^{k_1} \times T^{k_2} \right]^k_q | \gamma J M \rangle = \langle J M k q | J' M' \rangle \langle \gamma' J' \| \left[T^{k_1} \times T^{k_2} \right]^k \| \gamma J \rangle \quad (6.1)$$

On a par ailleurs par définition du produit tensoriel et par application de la relation de fermeture

$$\langle \gamma' J' M' | \left[T^{k_1} \times T^{k_2} \right]^k_q | \gamma J M \rangle$$

$$= \sum_{q_1 q_2} \langle k_1 q_1 k_2 q_2 | k q \rangle \langle \gamma' J' M' | T^{k_1}_{q_1} T^{k_2}_{q_2} | \gamma J M \rangle$$

$$= \sum_{q_1 q_2} \sum_{\gamma'' J'' M''} \langle k_1 q_1 k_2 q_2 | k q \rangle \langle \gamma' J' M' | T^{k_1}_{q_1} | \gamma'' J'' M'' \rangle \langle \gamma'' J'' M'' | T^{k_2}_{q_2} | \gamma J M \rangle . \quad (6.2)$$

L'application du théorème de Wigner-Eckart aux éléments de matrice de $T^{k_1}_{q_1}$ et de $T^{k_2}_{q_2}$ conduit à l'expression

$$\langle \gamma' J' M' | \left[T^{k_1} \times T^{k_2} \right]^k_q | \gamma J M \rangle$$

$$= \sum_{\gamma'' J'' M'' q_1 q_2} \langle k_1 q_1 k_2 q_2 | k q \rangle \langle J'' M'' k_1 q_1 | J' M' \rangle \langle J M k_2 q_2 | J'' M'' \rangle$$

$$\langle \gamma' J' \| T^{k_1} \| \gamma'' J'' \rangle \langle \gamma'' J'' \| T^{k_2} \| \gamma J \rangle . \quad (6.3)$$

La somme sur M", q_1 et q_2 peut être évaluée en tenant compte des relations (II 4.13), (III 1.10) et (III 2.1). On trouve

$$\sum_{q_1 q_2 M''} \langle k_1 q_1 k_2 q_2 | k q \rangle (-1)^{J + k_2 - J''} \langle k_2 q_2 J M | J'' M'' \rangle$$

$$(-1)^{J''+k_1-J'} \langle k_1 q_1\, J''M'' | J'M' \rangle$$

$$= (-1)^{J+k_1+k_2-J'} \langle kq\; JM | J'M' \rangle \langle (k_1 k_2) k, J, J' | k_1, (k_2 J) J'', J' \rangle$$

$$= (-1)^{J+k_1+k_2-J'} (-1)^{k+J-J'} \langle JM\, kq | J'M' \rangle (-1)^{k_1+k_2+J+J'}$$

$$\times \left[(2k+1)(2J''+1) \right]^{\frac{1}{2}} \begin{Bmatrix} k_1 & k_2 & k \\ J & J' & J'' \end{Bmatrix}$$

$$= (-1)^{k+J+J'} \left[(2k+1)(2J''+1) \right]^{\frac{1}{2}} \langle JM\, kq | J'M' \rangle \begin{Bmatrix} k_1 & k_2 & k \\ J & J' & J'' \end{Bmatrix} . \qquad (6.4)$$

En introduisant cette relation dans (6.3) et en comparant à (6.1), on obtient l'élément de matrice réduit du produit tensoriel en fonction des éléments de matrice réduits des opérateurs :

$$\langle \gamma' J' \| \left[T^{k_1} \times T^{k_2} \right]^k \| \gamma J \rangle$$

$$= (-1)^{k+J+J'} \sqrt{2k+1} \sum_{\gamma'' J''} \sqrt{2J''+1} \begin{Bmatrix} k_1 & k_2 & k \\ J & J' & J'' \end{Bmatrix} \langle \gamma' J' \| T^{k_1} \| \gamma'' J'' \rangle$$

$$\times \langle \gamma'' J'' \| T^{k_2} \| \gamma J \rangle . \qquad (6.5)$$

6.2. Opérateurs tensoriels agissant sur des systèmes différents

Soient $T^{k_1}(1)$ et $T^{k_2}(2)$ deux opérateurs tensoriels irréductibles agissant sur des systèmes différents 1 et 2 ou sur des parties différentes 1 et 2 d'un même système (ceci implique qu'ils commutent). Nous allons exprimer l'élément de matrice réduit de leur produit tensoriel dans la représentation couplée en fonction des éléments de matrice réduits des opérateurs individuels dans la représentation non couplée. Désignons par j_1, m_1, j_2, m_2 les nombres quantiques des parties 1 et 2 et par J, M ceux du système entier.

Appliquons d'abord le théorème de Wigner-Eckart aux éléments de matrice du produit tensoriel dans la base couplée :

$$\langle \gamma' j_1' j_2' J'M' | \left[T^{k_1}(1) \times T^{k_2}(2) \right]^k_q | \gamma j_1 j_2 JM \rangle$$

$$= \langle JM\, kq | J'M' \rangle \langle \gamma' j_1' j_2' J' \| \left[T^{k_1}(1) \times T^{k_2}(2) \right]^k \| \gamma j_1 j_2 J \rangle . \qquad (6.6)$$

D'autre part, développons le produit tensoriel suivant la formule (2.4) et les vecteurs de la base couplée en fonction de ceux de la base non couplée :

$$\langle \gamma' j_1' j_2' J'M' | \left[T^{k_1}(1) \times T^{k_2}(2) \right]^k_q | \gamma j_1 j_2 JM \rangle$$

$$= \sum_{q_1 q_2} \sum_{m_1 m_2 m_1' m_2'} \langle k_1 q_1\, k_2 q_2 | kq \rangle \langle j_1 m_1\, j_2 m_2 | JM \rangle \langle j_1' m_1'\, j_2' m_2' | J'M' \rangle$$

$$\langle \gamma' j_1' m_1'\, j_2' m_2' | T^{k_1}_{q_1}(1)\, T^{k_2}_{q_2}(2) | \gamma j_1 m_1\, j_2 m_2 \rangle . \qquad (6.7)$$

En vertu de la relation de fermeture, l'élément de matrice du second membre se récrit sous la forme

$$\langle \gamma' j_1' m_1'\, j_2' m_2' | T^{k_1}_{q_1}(1)\, T^{k_2}_{q_2}(2) | \gamma j_1 m_1\, j_2 m_2 \rangle$$

$$= \sum_{\gamma'' j_1'' m_1'' j_2'' m_2''} \langle \gamma' j_1' m_1'\, j_2' m_2' | T^{k_1}_{q_1}(1) | \gamma'' j_1'' m_1''\, j_2'' m_2'' \rangle$$

$$\langle \gamma'' j_1'' m_1''\, j_2'' m_2'' | T^{k_2}_{q_2}(2) | \gamma j_1 m_1\, j_2 m_2 \rangle$$

$$= \sum_{\gamma'' j_1'' m_1'' j_2'' m_2''} \left[\delta_{j_2'' j_2'}\, \delta_{m_2'' m_2'} \langle \gamma' j_1' m_1'\, j_2' m_2' | T^{k_1}_{q_1}(1) | \gamma'' j_1'' m_1''\, j_2' m_2' \rangle \right]$$

$$\left[\delta_{j''_1 j_1} \, \delta_{m''_1 m_1} \; \langle \gamma'' j_1 m_1 j''_2 m''_2 \,|\, T^{k_2}_{q_2}(2) \,|\, \gamma j_1 m_1 j_2 m_2 \rangle \right]$$

$$= \sum_{\gamma''} \left[\langle \gamma' j'_1 m'_1 \,|\, T^{k_1}_{q_1}(1) \,|\, \gamma'' j_1 m_1 \rangle \right.$$

$$\left. \times \; \langle \gamma'' j'_2 m'_2 \,|\, T^{k_2}_{q_2}(2) \,|\, \gamma j_2 m_2 \rangle \right] . \qquad (6.8)$$

L'application du théorème de Wigner-Eckart aux éléments de matrice de $T^{k_1}_{q_1}(1)$ et $T^{k_2}_{q_2}(2)$ donne

$$\langle \gamma' j'_1 m'_1 \; j'_2 m'_2 \,|\, T^{k_1}_{q_1}(1) \, T^{k_2}_{q_2}(2) \,|\, \gamma j_1 m_1 \; j_2 m_2 \rangle$$

$$= \langle j_1 m_1 \, k_1 q_1 \,|\, j'_1 m'_1 \rangle \langle j_2 m_2 \, k_2 q_2 \,|\, j'_2 m'_2 \rangle$$

$$\times \sum_{\gamma''} \langle \gamma j'_1 \| T^{k_1}(1) \| \gamma'' j_1 \rangle \langle \gamma'' j'_2 \| T^{k_2}(2) \| \gamma j_2 \rangle . \qquad (6.9)$$

Après avoir introduit la relation (6.9) dans (6.7), la somme sur q_1, q_2, m_1, m_2, m'_1 et m'_2 peut être effectuée en utilisant la relation (III 4.6). On obtient :

$$\langle \gamma' j'_1 j'_2 J' M' \,|\, \left[T^{k_1}(1) \times T^{k_2}(2) \right]^k_q \,|\, \gamma j_1 j_2 J M \rangle$$

$$= \left[(2j'_1+1)(2j'_2+1)(2k+1)(2J+1) \right]^{\frac{1}{2}} \quad \langle J M k q \,|\, J' M' \rangle$$

$$\times \begin{Bmatrix} j_1 & j_2 & J \\ k_1 & k_2 & k \\ j'_1 & j'_2 & J' \end{Bmatrix} \sum_{\gamma''} \langle \gamma j'_1 \| T^{k_1}(1) \| \gamma'' j_1 \rangle \langle \gamma'' j'_2 \| T^{k_2}(2) \| \gamma j_2 \rangle . \qquad (6.10)$$

Finalement, la comparaison avec l'expression (6.6) conduit à la relation cherchée :

$$\langle \gamma' j_1' j_2' J' \| [T^{k_1}(1) \times T^{k_2}(2)]^{k} \| \gamma j_1 j_2 J \rangle$$

$$= \left[(2j_1'+1)(2j_2'+1)(2k+1)(2J+1) \right]^{\frac{1}{2}} \begin{Bmatrix} j_1 & j_2 & J \\ k_1 & k_2 & k \\ j_1' & j_2' & J' \end{Bmatrix}$$

$$\times \sum_{\gamma''} \langle \gamma j_1' \| T^{k_1}(1) \| \gamma'' j_1 \rangle \langle \gamma'' j_2' \| T^{k_2}(2) \| \gamma j_2 \rangle . \qquad (6.11)$$

En particularisant cette formule, on obtient un certain nombre de relations utiles , que nous allons maintenant établir.

6.3. Produit scalaire d'opérateurs tensoriels agissant sur des systèmes différents

En faisant $k_1 = k_2$ (entier) et $k = o$ dans la formule (6.11), on obtient l'élément de matrice réduit du produit scalaire $T^k(1).T^k(2)$, défini d'après (2.17) et (2.18) par

$$T^{k}(1) . T^{k}(2) = (-1)^{k} \sqrt{2k+1} \left[T^{k}(1) \times T^{k}(2) \right]^{o}_{o} . \qquad (6.12)$$

Il suffit de remarquer que d'après la propriété de symétrie (III4.15) et la relation (III 4.23), on a

$$\begin{Bmatrix} j_1 & j_2 & J \\ k & k & o \\ j_1' & j_2' & J' \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} j_1' & j_2' & J' \\ j_1 & j_2 & J \\ k & k & o \end{Bmatrix}$$

$$= \delta_{J'J} \frac{(-1)^{j_1+j_2'+k+J}}{\sqrt{(2k+1)(2J+1)}} \begin{Bmatrix} j_1' & j_2' & J \\ j_2 & j_1 & k \end{Bmatrix} . \qquad (6.13)$$

Par conséquent

$$\langle \gamma' j_1' j_2' J' \| T^k(1) . T^k(2) \| \gamma j_1 j_2 J \rangle$$

$$= \delta_{J'J} \; (-1)^{j_1 + j_2' + J} \left[(2j_1'+1)(2j_2'+1) \right]^{\frac{1}{2}} \begin{Bmatrix} j_1' & j_2' & J \\ j_2 & j_1 & k \end{Bmatrix}$$

$$\times \sum_{\gamma''} \langle \gamma' j_1' \| T^k(1) \| \gamma'' j_1 \rangle \langle \gamma'' j_2' \| T^k(2) \| \gamma j_2 \rangle . \qquad (6.14)$$

6.4. <u>Un seul opérateur tensoriel dans la représentation couplée</u>

Pour obtenir l'élément de matrice réduit, dans la représentation couplée, d'un opérateur tensoriel irréductible $T^k(1)$ agissant seulement sur la partie 1 du système, il suffit de poser $k_2 = o$ et $T^{k_2}(2) = 1$ dans la formule (6.11). On obtient

$$\langle \gamma' j_1' j_2' J' \| T^k(1) \| \gamma j_1 j_2 J \rangle$$

$$= \left[(2j_1'+1)(2j_2'+1)(2k+1)(2J+1) \right]^{\frac{1}{2}} \begin{Bmatrix} j_1 & j_2 & J \\ k & o & k \\ j_1' & j_2' & J' \end{Bmatrix}$$

$$\times \langle \gamma' j_1' \| T^k(1) \| \gamma j_1 \rangle \, \delta_{j_2' j_2} . \qquad (6.15)$$

Par application des propriétés de symétrie (III 4.15), (III 4.17) et de la relation (III 4.23), on a :

$$\begin{Bmatrix} j_1 & j_2 & J \\ k & o & k \\ j_1' & j_2 & J' \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} j_1' & j_2 & J' \\ j_1 & j_2 & J \\ k & o & k \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} J' & j_1' & j_2 \\ J & j_1 & j_2 \\ k & k & o \end{Bmatrix}$$

$$= \frac{(-1)^{j_1'+j_2+J+k}}{\sqrt{(2j_2+1)(2k+1)}} \begin{Bmatrix} J' & j_1' & j_2 \\ j_1 & J & k \end{Bmatrix} , \tag{6.16}$$

d'où

$$\langle \gamma' j_1' j_2' J' \| T^k(1) \| \gamma j_1 j_2 J \rangle$$

$$= \delta_{j_2' j_2} (-1)^{j_1'+j_2+J+k} \left[(2j_1'+1)(2J+1) \right]^{\frac{1}{2}} \begin{Bmatrix} J' & j_1' & j_2 \\ j_1 & J & k \end{Bmatrix} \langle \gamma' j_1' \| T^k(1) \| \gamma j_1 \rangle . \tag{6.17}$$

De même, pour obtenir l'élément de matrice réduit, dans la représentation couplée, d'un opérateur tensoriel irréductible $T^k(2)$ agissant seulement sur la partie 2 du système, il suffit de poser $k_1 = o$ et $T^{k_1}(1) = 1$ dans la formule (6.11). Un calcul analogue à celui qui conduit à la relation (6.17) donne

$$\langle \gamma' j_1' j_2' J' \| T^k(2) \| \gamma j_1 j_2 J \rangle$$

$$= \delta_{j_1' j_1} (-1)^{j_1+j_2+J'+k} \left[(2j_2'+1)(2J+1) \right]^{\frac{1}{2}} \begin{Bmatrix} J' & j_2' & j_1 \\ j_2 & J & k \end{Bmatrix} \langle \gamma' j_2' \| T^k(2) \| \gamma j_2 \rangle . \tag{6.18}$$